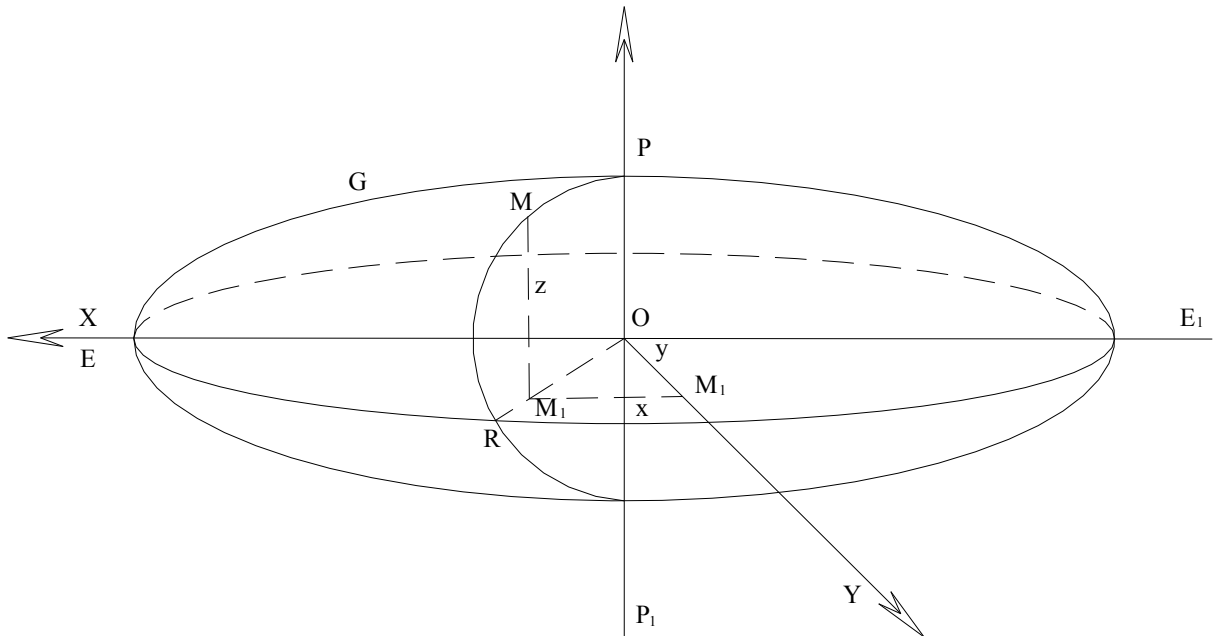


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Чернігівський державний інститут економіки і управління

Р.М. Літнарівч



ОСНОВИ ВИЩОЇ ГЕОДЕЗІЇ

навчальний посібник

**для студентів денної і заочної форм навчання
з спеціальності 7.07 09 04 - Землевпорядкування та кадастр**

Чернігів 2002

Літнарівч Р.М. Основи вищої геодезії. Навчальний посібник для студентів денної і заочної форм навчання з спеціальності 7.07 09 04 - Землевпорядкування та кадастр, Чернігів, ЧДІЄіУ, 2002, - 147с.

Рецензенти: доктор технічних наук, професор Боровий В.О.
доктор с/х наук, професор Канівець В.І.

Зміст	стор
Лекція 1 Предмет вищої геодезії .Опорна геодезична мережа	3
Лекція 2 Основні формули та співвідношення на поверхні земного еліпсоїда	11
Лекція 3 Обчислення довжини дуги меридіана, паралелі і площі знімальної трапеції	21
Лекція 4 Розв'язування малих сферичних і сфероїдальних трикутників	32
Лекція 5 Дослідження кривих на еліпсоїді обертання	40
Лекція 6 Перехід від нормального перерізу до геодезичної лінії	47
Лекція 7 Обчислення геодезичних широт, довгот та азимутів.	55
Лекція 8 Розв'язок головної задачі за формулами із середніми аргументами	60
Лекція 9 Диференціальні формули першого і другого роду	68
Лекція 10 Система плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера	74
Лекція 11 Зв'язок геодезичних і плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера. Редукування вимірів	84
Лекція 12 Зміст і предмет	91
Лекція 13 Відхилення прямовисних ліній	95
Лекція 14 Абсолютні і відносні відхилення прямовисних ліній.	100
Лекція 15 Встановлення співвідношень між астрономічним і геодезичним азимутом	106
Лекція 16 Редукційна проблема	113
Лекція 17 Редукування по способу розгортання	120
Лекція 18 Системи гіпсометричних висот	125
Лабораторна робота №14	133
Лабораторна робота № 15	139
Література	146

Рекомендовано вченою радою ЧДІЄіУ для використання у навчальному процесі, протокол №6 від 27.06.2001р.

© Літнарівч Р.М.,2002

Введення в курс.

Лекція 1.Предмет вищої геодезії .Опорна геодезична мережа

1.1 Предмет та задачі вищої геодезії .

Вища геодезія вивчає фігуру і зовнішнє гравітаційне поле Землі, розробляє методи створення систем геодезичних координат на всю поверхню Землі або на окремі її ділянки, способи визначення положення точок земної поверхні в тій чи іншій системі координат.

Фундаментальною основою (науково-практичною) є побудова земної системи геодезичних координат та єдиної моделі зовнішнього гравітаційного поля Землі за допомогою теоретичних досліджень та математичної обробки результатів наземних астрономічних, геодезичних та гравіметричних вимірювань, супутникових спостережень, світлолокації Місяця та великобазисних радіоінтерферометричних спостережень .

Методи побудови геодезичних мереж вивчаються в курсі "Основні геодезичні роботи" і в курсі "Космічна геодезія", астрономічні визначення широт і довгот точок земної поверхні та азимутів напрямків вивчаються в курсі "Геодезична астрономія". Вивченням гравітаційного поля Землі займається наука "Гравіметрія" та "Теорія фігури Землі".

В наш час все більшого значення набуває геодинамічний аспект геодезії-визначення зміни положення точок земної поверхні та елементів гравітаційного поля в часі, які спричиняються глобальними еволюційними процесами в житті Землі і проявляються в рухах земної кори, переміщенні літосферних плит, нерівномірності обертання Землі, переміщенням полюсів та центра мас і т.п.

Побудова геодезичних мереж розрахована на :

1 .Встановлення єдиної геодезичної системи координат на території країни.

2.Вивчення фігури і гравітаційного поля Землі та їх змін в часі.

3.Геодезичне забезпечення картографування території.

4.функціонування засобів наземної, морської і аерокосмічної навігації, аерокосмічного моніторинга природного та техногенного середовищ.

6.Еталонування технічних засобів визначення місцезнаходження та орієнтування.

7.Вивчення геодинамічних явищ:

а) зон аномальних деформацій земної поверхні;

б) рухів полюсів і нерівномірності обертання Землі;

в) рухів земної кори в регіональному та глобальному масштабах.

Теоретична геодезія встановлює залежності між результатами астрономо-геодезичних, гравіметричних та супутникових вимірювань і величинами, що вивчають фігуру та зовнішнє гравітаційне поле Землі. У вищу геодезію входить також сфероїдальна або математична геодезія, яка вивчає геометрію Землі та

методи розв'язання геодезичних задач на її поверхні.

Базовими поняттями у вищій геодезії є:

-прямовисна лінія -це напрям в даній точці простору, що співпадає з напрямом дії сили ваги в цій точці;

-рівнева поверхня-це поверхня, що в кожній своїй точці ортогональна напрямку дії сили ваги в даній точці.

В 1873р. Лістінгом було запропоновано вважати фігуру Землі Геоїд-тіло, поверхня якого збігається із середнім рівнем води в морях та океанах в стані цілковитого спокою та рівноваги, продовжена під материками так, щоб напрями прямовисних ліній перетинали цю поверхню у всіх її точках під прямим кутом, тобто є рівневою; він не описується і переходять до фігури еліпсоїда обертання, який описується слідуною формулою:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1(1.1)$$

При невеликому стисненні еліпсоїда,

Порівняно просто розв'язуються задачі:

1) визначення взаємного положення точок на еліпсоїді обертання в системі геодезичних еліпсоїдальних координат В і L;

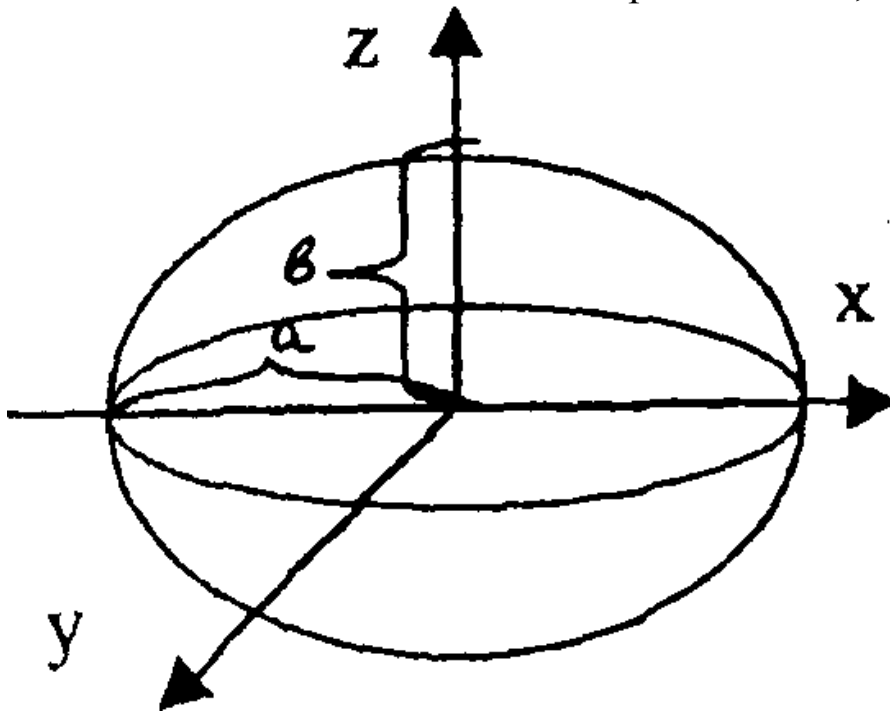


Рис. 1.1 .Еліпсоїд обертання.

2) визначення взаємного положення точок, розташованих над поверхнею земного еліпсоїда, в системі просторових координат В; L ; Н.

3) картографічне забезпечення поверхні еліпсоїда на площині.

Кінцевими даними геодезичних вимірів являються координати опорних

точок Землі. При цьому важливим є вибір поверхні віднесення. Всі безпосередні геодезичні виміри зв'язані з лінією виска – прямовисною лінією, яка фіксує точку. Рівневу поверхню можемо прийняти за поверхню віднесення-це поверхня геоїда. Вона досить складна. Молоденський М.С. встановив, що фігуру геоїда без знання густини мас, її розподіл ми ще не знаємо. Молоденський запропонував 1945р. замість геоїда брати фігуру квaziгеоїда, для якої не беруть до уваги густину і розподіл мас. На океанах і морях поверхня квaziгеоїда співпадає з фігурою геоїда, а в горах неспівпадання по висоті досягає до двох метрів. Тоді, поверхня, яка зв'язана з напрямком виска відпадає.

В геодезії за поверхнею віднесення приймається еліпсоїд. При цьому потрібно, щоб еліпсоїд обертання був найбільш близьким до фігури Землі. Його називають загальним земним еліпсоїдом. Необхідно, щоб центр ваги геоїда і сума квадратів відхилень по висоті між загальним земним еліпсоїдом і фігурою геоїда була мінімальною.

Для обробки геодезичних вимірів приймається поверхня референц-еліпсоїда, який визначається на основі результатів вимірів певної країни.

До 1942р. в бувшому Союзі був прийнятий еліпсоїд Беселя, а з 1946р. декретом уряду був прийнятий референц-еліпсоїд Ф.Н. Красовського з параметрами: великою піввіссю $a=6378245$.м. і полярним стисненням $\alpha=(a-b)/a=1:298,3$, де b -мала піввісь еліпсоїда.

1.2. Методи створення геодезичної мережі.

Геодезичною мережею називається система точок на поверхні Землі, закріплених спеціальними центрами і знаками, координати яких визначено геодезичними методами.

Планові X і Y і поверхневі координати B і L визначають методами триангуляції, полігонометрії, трилатерації, лінійно-кутової триангуляції та їх поєднанням. Геодезичні мережі при цьому називають триангуляцією, полігонометрією, трилатерацією.

Висотну координату Z (або H) визначають методами нівелювання: геометричним, тригонометричним, гідростатичними... Геодезичну мережу, в якій визначають висоти точок, називають висотною.

Планові і висотні мережі можуть створюватись незалежно. Метод триангуляції запропонував у 1617р. голандський вчений Снелліус. Геодезична мережа складається з трикутників у яких вимірюються всі кути і одна або кілька

сторін. Мережу редукують (відносять) на поверхню земного еліпсоїда або на площину. Маючи координати вихідної точки і азимут лінії, обчислюють координати всіх точок мережі.

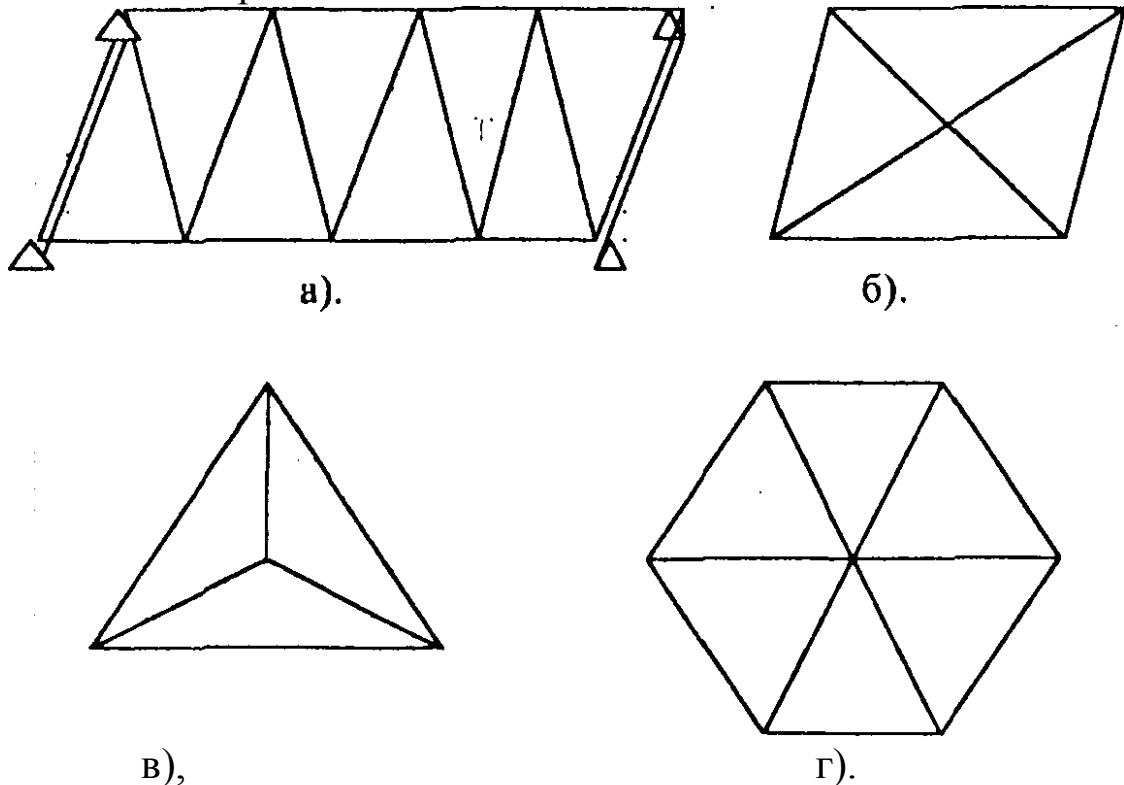


Рис.1.2. Типові фігури триангуляції: **а**-ряд трикутників; **б**-геодезичний чотирикутник; **в**-вставка пункту в трикутник; **г**-центральна система.

Метод полігонометрії-прокладають на місцевості системи полігонів або окремих полігонометричних ходів у яких координати пунктів, що фіксують вершини ходу визначають по вимірним довжинам сторін між даними точками і кутами при цих вершинах. Метод полігонометрії детально розглядався на 2 курсі.

Схема побудови геодезичної мережі в трилатерації і лінійно-кутовій триангуляції така сама, як і в триангуляції.

У першому методі вимірюються лише лінії (кутів не вимірюють), а в другому вимірюють всі кути і всі лінії. В методі трилатерації довжини ліній вимірюють радіодалекомірами або світлодалекомірами, що дає більшу точність. Лінійно-кутовий метод-найточніший метод визначення геодезичних координат.

Координати точок земної поверхні можна визначати астрономічними і супутниковими методами. Супутникові методи є найперспективнішими. Супутникова система GPS (Global Position System) забезпечує високу точність автономного визначення координат пунктів при мінімальному часі спостережень.

1.3.Класифікація геодезичних мереж, їх призначення і точність. Існують такі планові геодезичні мережі:

- а). державна геодезична мережа триангуляції 1, 2, 3, 4 класів
- б) мережі згущення 1 і 2 розряду;

в) знімальні мережі.

Державна висотна мережа є I, II, III, IV класів. Існують, також, мережі технічного нівелювання. Планова мережа має координати центрів знаків, а висотна-висоти. Практично вся планова мережа має відомі висоти, але не навпаки. Зв'язані з побудовою державних мереж роботи називають основними геодезичними роботами. Вимірювання в мережах вищих класів (1 і 2) виконують з найбільшою точністю, що поступово зменшується в мережах нижчих класів (3 і 4). Державні мережі 1 і 2 класу використовують для створення єдиної системи координат, а також для вирішення наукових завдань визначення розмірів і фігури Землі, горизонтальних, та вертикальних рухів земної кори і т.п. Мережі 3, 4 класів служать для обґрунтування топографічного знімання дрібних масштабів до 1:10000. Державна геодезична мережа країни допускає похибки у взаємному положенні суміжних точок не більше як 1:25000.

Геодезичні мережі згущення 1 і 2 розряду використовуються для обґрунтування топознімань в масштабах 1:5000-1:500 і для виконання інженерних робіт. Відносна помилка у взаємному положенні пунктів в цих мережах становить 1:10000. Знімальні мережі є основою для топознімань всіх масштабів і створюються методами різного роду засічок, прокладенням теодолітних, мензульних ходів. Точність планових мереж 1:3000, а висотних $-0,2^* \sqrt{L}$, де L- довжина ходу в км.

1.4. Схема і програми побудови геодезичної мережі.

Ряди триангуляції 1 класу прокладаються вздовж меридіанів і паралелей периметром 800-1000 км. На перетинах рядів 1 класу вимірюються базисні сторони, на кінцях яких астрономічно визначають широти, довготи і азимути (спостерігають пункти Лапласа). Вздовж рядів триангуляції 1 класу виконується астрономо-геодезичне нівелювання для визначення висот геоїда. Триангуляцію 1 класу прийнято називати астрономо-геодезичною мережею держави.

Триангуляція 2 класу будується без радів у вигляді заповнюючої мережі. Базисні сторони розміщуються рівномірно через 25 трикутників.

Геодезичні мережі 3 і 4 класів будуються вставкою окремих систем, трикутників і пунктів у мережі триангуляції вищих класів.

Нинішня програма геодезичної мережі характеризується вищою точністю кутових і лінійних вимірювань.

(Див. таблицю №1).

1.5. Проектування геодезичних мереж, рекогносцирування. Закладка геодезичних знаків та центрів.

Проектування геодезичних мереж виконується у відповідності до проектного завдання за спеціальними інструкціями.

Спочатку приступають до збору всього картографічного матеріалу на дану територію. При проектуванні геодезичних мереж беруть до уваги

економічну ефективність і простоту виробничого процесу.

Проектування мережі 2 класу виконують на карті масштабу 1:100000.

Вимоги до мережі:

- трикутники повинні бути близькі до рівносторонніх;
- довжина сторін від 7 до 20 км;
- діагональні напрямки не проектуються;
- базисні сторони розташовуються через 25 трикутників;
- прив'язка існуючих мереж до проектуючої здійснюється суміщенням

пунктів;

- на кінцях базисної сторони виконуються астровизначення. На карті намічають схему і визначають висоти геодезичних знаків.

Побудова триангуляції 2 класу пов'язана з постановкою топознімання в масштабах 1:25000 і 1:10000. Необхідна густота пунктів - 1 пункт на 50-60 км². З триангуляцією 2 класу проектують і 3 клас. Мережу 3 класу будують вставками окремих пунктів або систем, з довжинами сторін від 5 до 8 км. Мережу 4 класу проектують на основі мережі 3 класу. Довжини сторін від 2 до 5 км.

Мережі 1 і 2 розрядів є мережами згущення державної мережі в районах для топографічних знімань великих масштабів:

1-й розряд для знімання в масштабі 1:5000;

2-й розряд для знімання в масштабі 1:2000 і крупнішого.

Рекогносцирування полягає в перенесенні в натуру проекту геодезичної мережі, виборі місцеположення пунктів, визначенні висот перешкод, виборі типів центрів і т.п. Рекогносцирування виконують до побудови геодезичних знаків.

ХАРАКТЕРИСТИКА СУЧАСНИХ ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖ.

Клас або розряд	Довжина сторін км	Допустим а похибка вимір. кутів	Допустим а нев'язка в трикутниках	Допустим а похибка базисних сторін	Похибка сторін у найслабшому місці
		Державні геодезичні мережі			
1	20-25	0,7''	3''	1:400000	1:150000
2	7-20	1''	4''	1:300000	1:200000
3	5-8	1,5''	6''	1:200000	1:120000
4	2-5	2,0''	8''	1:150000	1:70000
		Геодезичні мережі згущення			

1р.	2-5	5''	20''	1:100000	1:50000
2р.	0,3-3	10''	40''	1:50000	1:25000

таблиця № 1.

УМОВИ рекогносцирування - пункти не можна вибрати біля залізниць, автошляхів, ліній високої напруги і т.п.;

- висоти пунктів повинні бути такими, щоб їх було видно безпосередньо;
- вивчення ґрунтів і визначення глибини закладання геодезичних центрів.

Основним документом є рекогносцирувальний журнал.

Геодезичні центри і знаки є споруди при допомозі яких закріплюють на місцевості пункти геодезичної мережі.

Геодезичний центр-бетонна споруда з чотирьох монолітів. Верхній моноліт-розпізнавальний стовп, наступний-основний моноліт, що має марку. В районах глибокого промерзання ґрунту закладають інші види центрів. Поблизу основного пункту для зручності прив'язки мереж згущення закладають по два орієнтирних пункту на відстані 0,5-1 км.

Над центром геодезичного пункту мережі будують геодезичний знак з дерева або металу.

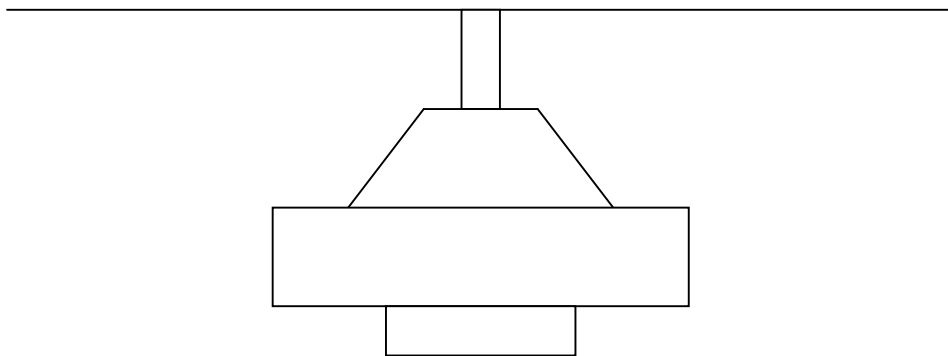


Рис. 1.2.Центр.

Типи геодезичних знаків такі:

- проста піраміда;
- простий сигнал;
- складний сигнал.

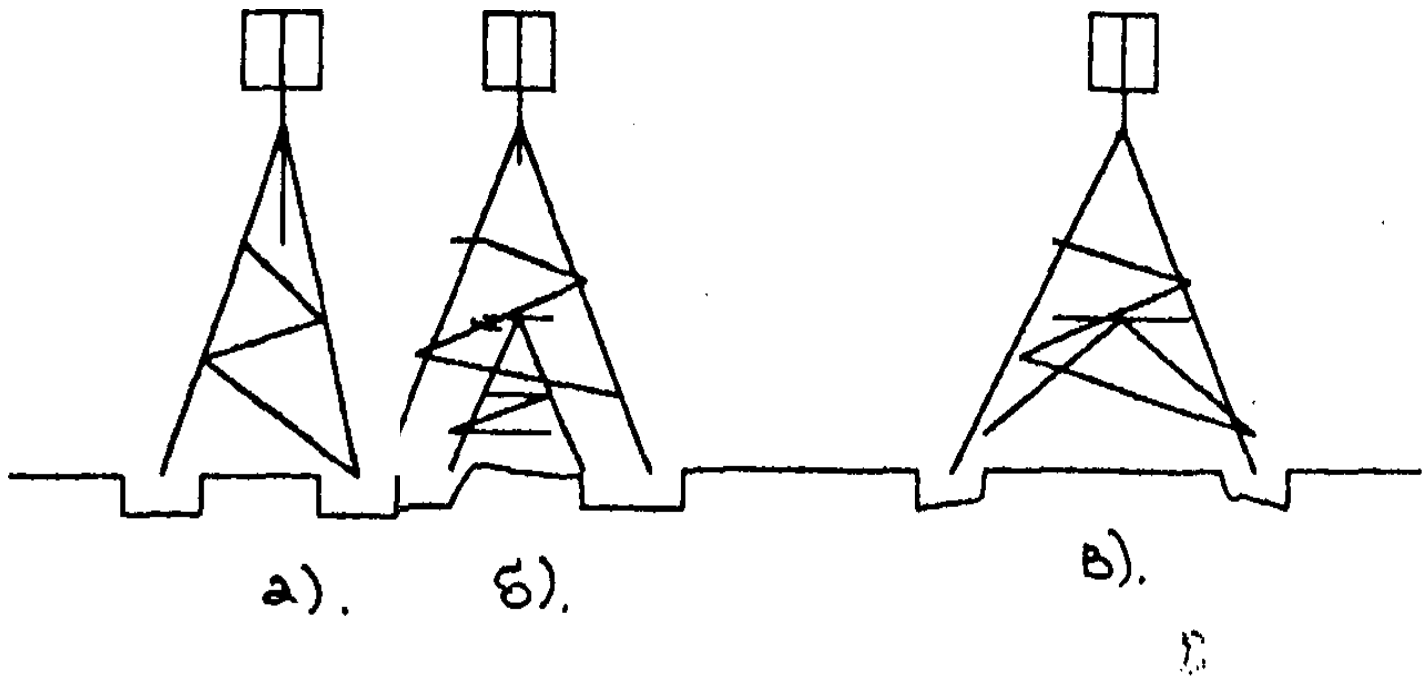


Рис. 1.3. Геодезичні знаки: а). проста піраміда;
 б). простий сигнал;
 в). складний сигнал.

1.6. Відомості про організацію основних геодезичних робіт.

Загальне керівництво здійснює ГУГКК. У його підпорядкуванні знаходяться ТГП, польові експедиції і камеральні цехи.

Польові експедиції складаються з польових партій, а вони з бригад.

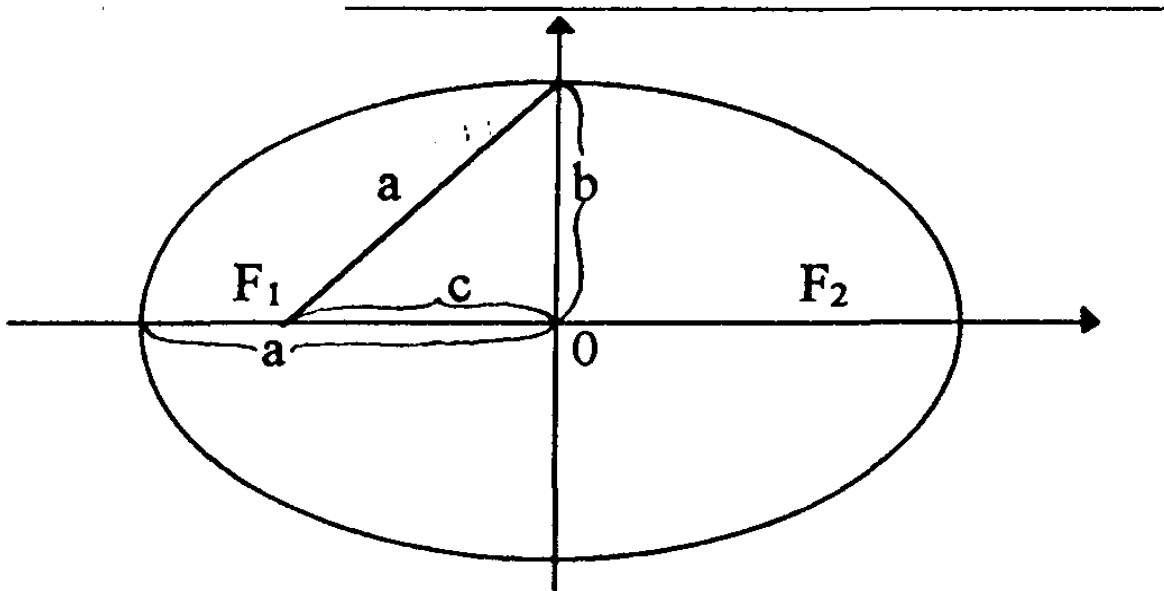
На геодезичних підприємствах є обчислювальний, фотолабораторний, фотограмметричний, стереофотограмметричний і картографічний цехи.

Сфероїдальна геодезія

Розділ 1.

Лекція 2. Основні формули та співвідношення на поверхні земного еліпсоїда

2.1. Параметри земного еліпсоїда, зв'язки між ними.



Поверхня еліпсоїда утворюється від обертання еліпса навколо його малої (полярної) осі.

Еліпс визначається розмірами його великої a і малої b півосей. За розмірами півосей можна знайти положення фокусів F_1 і F_2 .

$$OF_1 = OF_2 = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (2.1)$$

Першим ексцентриситетом еліпса e буде величина:

$$e = \frac{OF_1}{a} = \frac{OF_2}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{c}{a}, \quad (2.2)$$

тобто, ексцентриситет є відношення фокусної відстані до великої півосі;
другий ексцентриситет e'

$$e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \quad (2.3)$$

стиснення α

$$\alpha = \frac{a - b}{a}, \quad (2.4)$$

Всі лінійні і відносні величини еліпса називаються елементами еліпса. Вони також відносяться і до еліпсоїда обертання. Параметри є **a** – велика (екваторіальна) піввісь еліпсоїда або **a** і α . Вони визначають еліпсоїд обертання. Величини e^2 і e'^2 є похідними.

Між даними величинами існують залежності.

1. Співвідношення між e і e' .

Із формули (2.2), запишемо

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \quad (2.5)$$

Із формули (2.3) одержимо

$$e'^2 = \frac{a^2}{b^2} - 1, \quad (2.6)$$

або
$$\frac{a^2}{b^2} = 1 + e'^2. \quad (2.7)$$

Тоді

$$\frac{b^2}{a} = \frac{1}{1 + e'^2}. \quad (2.8)$$

Підставляючи (2.8) в (2.5) одержимо:

$$e^2 = 1 - \frac{1}{1 + e'^2},$$

і
$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2}, \quad (2.9)$$

Із (2.5) запишемо
$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$$

і
$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{1 - e^2} \quad (2.10)$$

Підставляючи (2.10) в (2.6) одержим

$$e'^2 = \frac{1}{1 - e^2} - 1,$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \quad (2.11)$$

Формули (2.9) і (2.11) дають співвідношення між e і e' .

2. Залежність між e і a

3. З формули (2.4) запишемо

$$\alpha = 1 - \frac{b}{a}, \quad (2.12)$$

З формули (2.2)

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

Підставляючи даний вираз в попередній, одержим

$$\sqrt{1 - e^2} = 1 - \alpha$$

і $1 - e^2 = 1 - 2\alpha + \alpha^2,$

тоді $e^2 = 2\alpha - \alpha^2 \quad (2.13)$

Формула (2.13) дає залежність між e і α . Нехтуючи помилкою квадратування, одержимо:

$$e^2 \approx 2\alpha \quad (2.14)$$

Для наближених розрахунків приймають

$$a = 6400 \text{ км}; a-b = 21 \text{ км}; a = 1:300; e^2 = 1:150; e'^2 = 1:600.$$

Відомо ряд еліпсоїдів, параметри яких визначались в різних регіонах Землі названих в честь видатних вчених: Бесселя, Кларка, Хейфорда, Красовського.

Для еліпсоїда Красовського, що має ще застосування в геодезичних висотах в Україні прийняті параметри:

$$a = 6378245 \text{ м}, \alpha = 1:298,3.$$

$$\text{Тоді } b = 6356863,01877;$$

$$\alpha = 0,003352329869;$$

$$e^2 = 0,006693421623;$$

$$e'^2 = 0,006738525415.$$

2.2. Системи координат, які застосовуються у вищій геодезії.

1. Система геодезичних координат В, L, Н.

Універсальна система координат, єдина для всієї Землі, не вимагає додаткових побудов, визначає положення нормалей.



Рис.2.2. Система геодезичних координат В, L, Н.

Точки на поверхні еліпсоїда можна визначити геодезичною довготою L - двограним кутом між площиною початкового меридіана (Грінвічського) і меридіана, який проходить через задану точку M'. Геодезична довгота вимірюється від 0° до 180° і буває східна і західна.

Меридіан - це січення поверхні еліпсоїда площиною, яка проходить через полярну вісь обертання Землі. Всі точки на ньому мають однакову довготу.

Паралель - це лінія перетину поверхні еліпсоїда площиною, що перпендикулярна до осі обертання його. Паралель є лінією рівних широт. Площина екватора проходить через центр еліпсоїда O, перпендикулярно до осі його обертання.

Геодезичною широтою називають кут, утворений нормаллю до поверхні земного еліпсоїда в даній точці і площиною його екватора. Широти відраховуються на північ і південь від екватора від 0° до 90°.

Геодезичною висотою H точки M, розташованої на фізичній поверхні Землі, називається віддаль по нормалі від цієї точки до її проєкції на поверхню земного еліпсоїда.

Астрономічні координати складаються із астрономічної широти φ - кута,

твореного прямовисною лінією в даній точці і площиною, перпендикулярною до осі обертання Землі. Вона визначається із астрономічних спостережень.

Астрономічна довгота λ - двогранний кут між площинами початкового астрономічного меридіана Грінвіча до меридіана даної точки.

Ортометрична висота - висота точки над поверхнею геоїда. Вона може бути вирахована тільки при знанні будови земної кори.

Географічні координати – це узагальнене поняття про астрономічні і геодезичні координати, коли відхилення прямовисних ліній не враховують.

2. Система прямокутних просторових координат X, Y, Z .

Її початок знаходиться в центрі земного еліпсоїда, а осі X і Y - в площині кватора, при цьому X - в площині початкового меридіана, а Y - перпендикулярна до неї. Вісь Z проходить вздовж полярної осі.

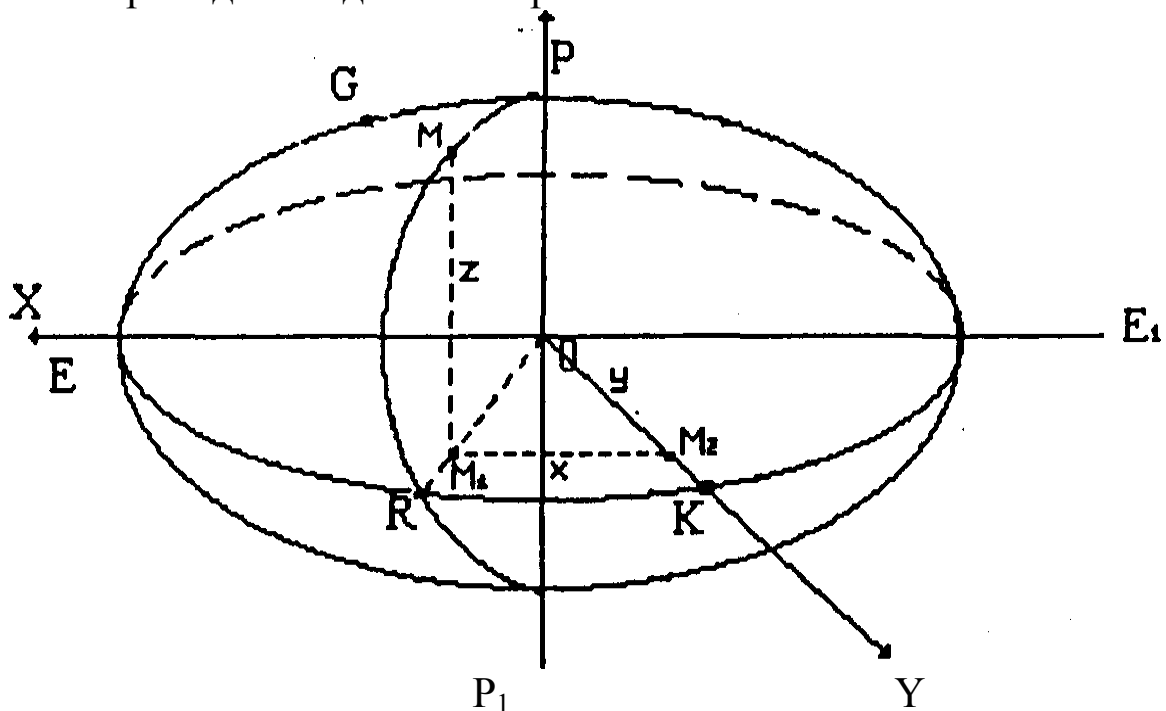


Рис. 2.3. Система прямокутних просторових координат XYZ .

$$X = M_1M_2 \quad Y = OM_2 \quad Z = M_1M$$

Система X, Y, Z застосовується в теоретичній геодезії і для розв'язання задач космічної геодезії.

3. Система геоцентричних координат

Площина меридіанного еліпса

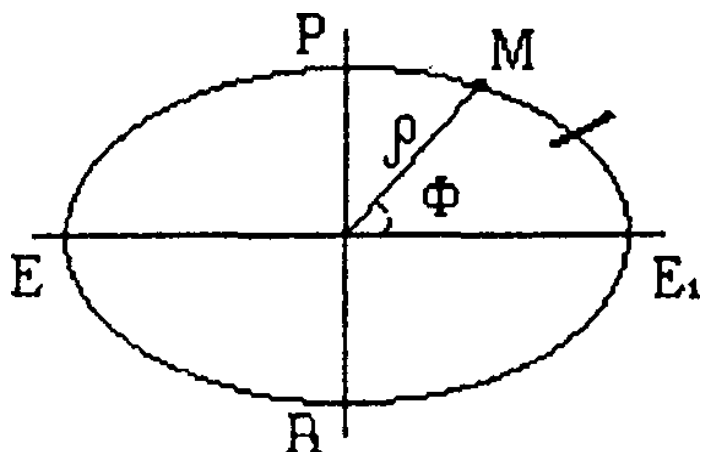


Рис. 2.4. Система геоцентричних координат.

В даній системі координат повинна бути відома геодезична довгота b меридіанного еліпса, який проходить через точку M , яка визначається на еліпсі геоцентричною широтою Φ - кутом між радіусом - вектором p точки M і площиною екватора (великою віссю обертання). Застосовується в астрономії, Теорії фігури Землі, математичній картографії.

4. Система прямокутних координат x, y , які віднесені до площини меридіанного еліпса даної точки.

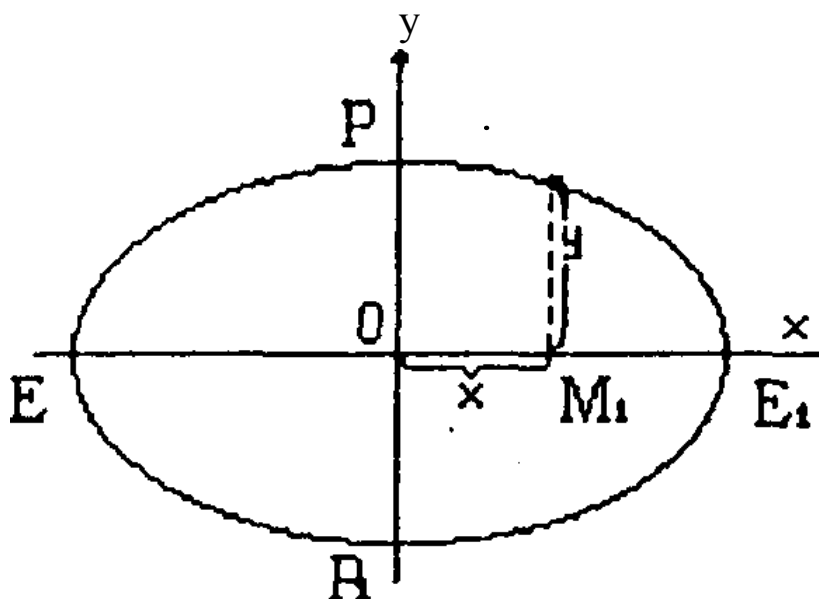


Рис. 2.5. Система координат x, y .

Центр системи координат співпадає з центром меридіанного еліпса, вісь ox - в площині екватора, вісь y вздовж осі обертання. Довгота меридіанного еліпса відома. Положення точки M визначають двома координатами: $x = om_1$; $y = mm_1$. Використовується тільки для теоретичних викладок.

5. Система координат з приведеною широтою U .

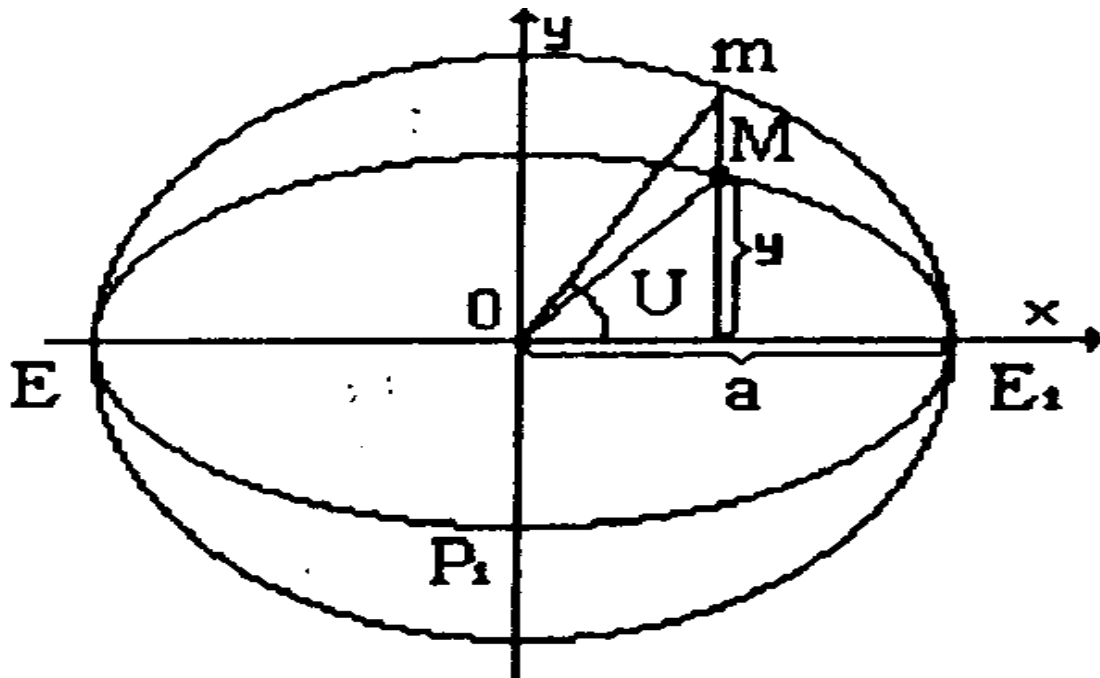
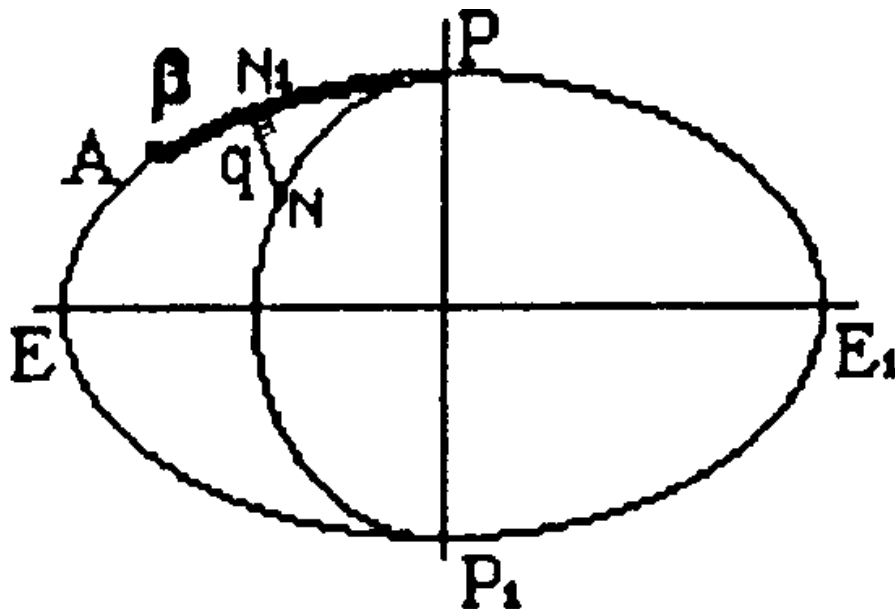


Рис. 2.6. Система координат з приведеною широтою.

Геодезична довгота відома. Із центра O радіусом a проведемо коло і проведемо ординату y точки M до перетину з колом. Одержимо точку m . Приведена широта U - кут між лінією, яка сполучає з центром еліпсоїда точку перетину ординати Y з колом радіуса a і площиною екватора.

Має застосування при передачі координат на великі відстані.

6. Система прямокутних сфероїдальних координат P і q



$$AN_1 = p, N_1N = q$$

Рис. 2.7. Система прямокутних сфероїдальних координат

Координатні осі будуються на поверхні еліпсоїда. Нехай, початок системи координат знаходиться в точці A . Одну з осей направимо вздовж меридіана.

Визначим координати точки N.

7. Плоскі прямокутні координати.

Практично необхідно мати координати пунктів геодезичної мережі в плоскій прямокутній системі прямолінійних координат для того, щоб можна було легко використовувати геодезичні дані при виконанні проектних робіт, при землеустрої і т.п.

Виникає необхідність введення проекції поверхні еліпсоїда на площину, тобто зображення частини земної поверхні на площині за деякими законами. В нас застосовується проекція Гауса-Крюгера.

2.3. Зв'язок між деякими системами координат.

1. Зв'язок між геодезичною широтою B і координатами x і y , які віднесені до площини меридіану точки, яку визначаємо.

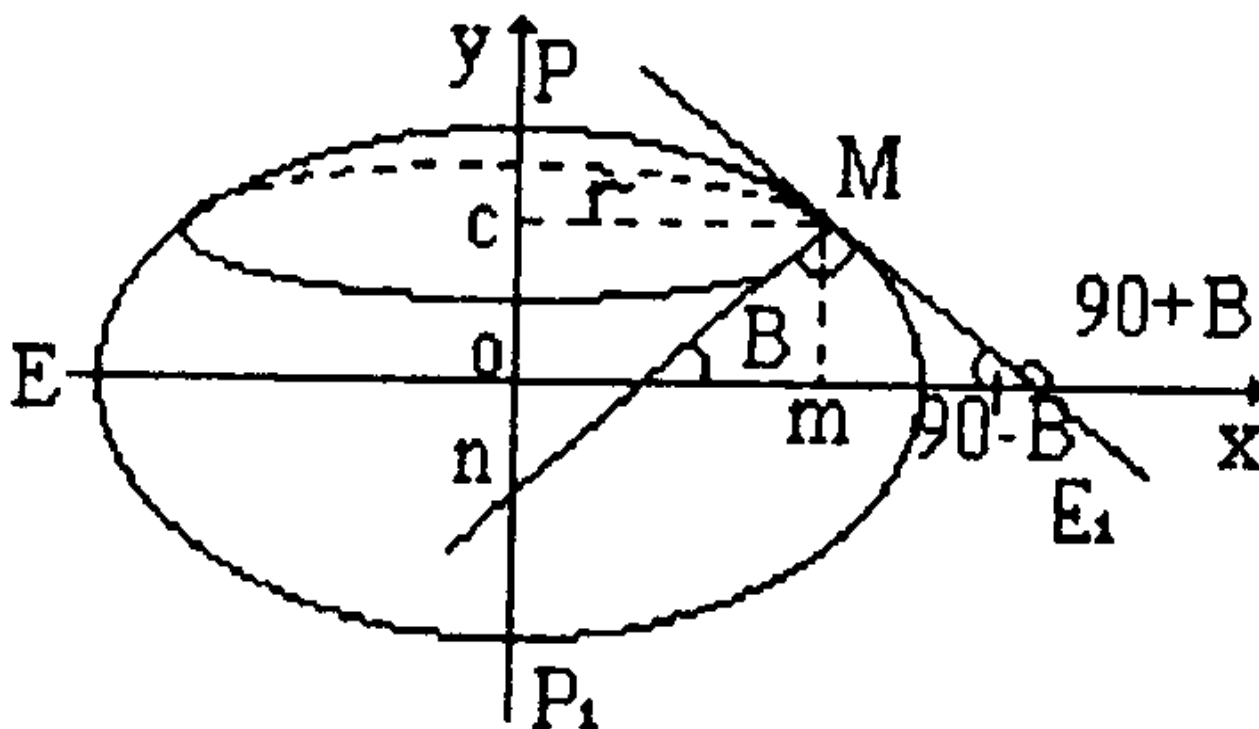


Рис. 2.8.
Зв'язок координат B і X, Y .
Напишемо рівняння еліпса
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(2.15)

Проведемо через точку M дотичну. Тангенс кута дотичної в даній точці є перша

похідна $\frac{dy}{dx}$.
$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(90 + B) = -\operatorname{ctg}B. \quad (2.16)$$

Виразимо $\frac{dy}{dx}$ через координати x, y . Продиференціюємо і скоротимо на 2,

$$\frac{2x dx}{a^2} + \frac{2y dy}{b^2} = 0$$

одержимо: і

Тоді

$$\frac{ydy}{b^2} = -\frac{xdx}{a^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \quad (2.17)$$

Підставивши (2.16) у (2.17), одержимо:

$$-ctgB = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y},$$

звідки $tgB = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y}{x}$. (2.18) Приймаючи до уваги, що

а $B = a\sqrt{1-e^2}$,
 $y = x(1-e^2)tgB$. (2.19)

Підставим (2.19) в (2.15)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2(1-e^2)^2 tg^2 B}{a^2(1-e^2)} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} [1 + (1-e^2)tg^2 B] = 1,$$

$$x^2 \left[(1 + tg^2 B) - e^2 \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B} \right] = a^2$$

ліву і праву частину помножимо на $\cos^2 B$

$$x^2 [(\cos^2 B + \sin^2 B) - e^2 \sin^2 B] = a^2 \cos^2 B,$$

$$x = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \quad (2.20)$$

Підставляючи (2.20) в (2.19), одержимо

$$y = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} (1 - e^2) \frac{\sin B}{\cos B};$$

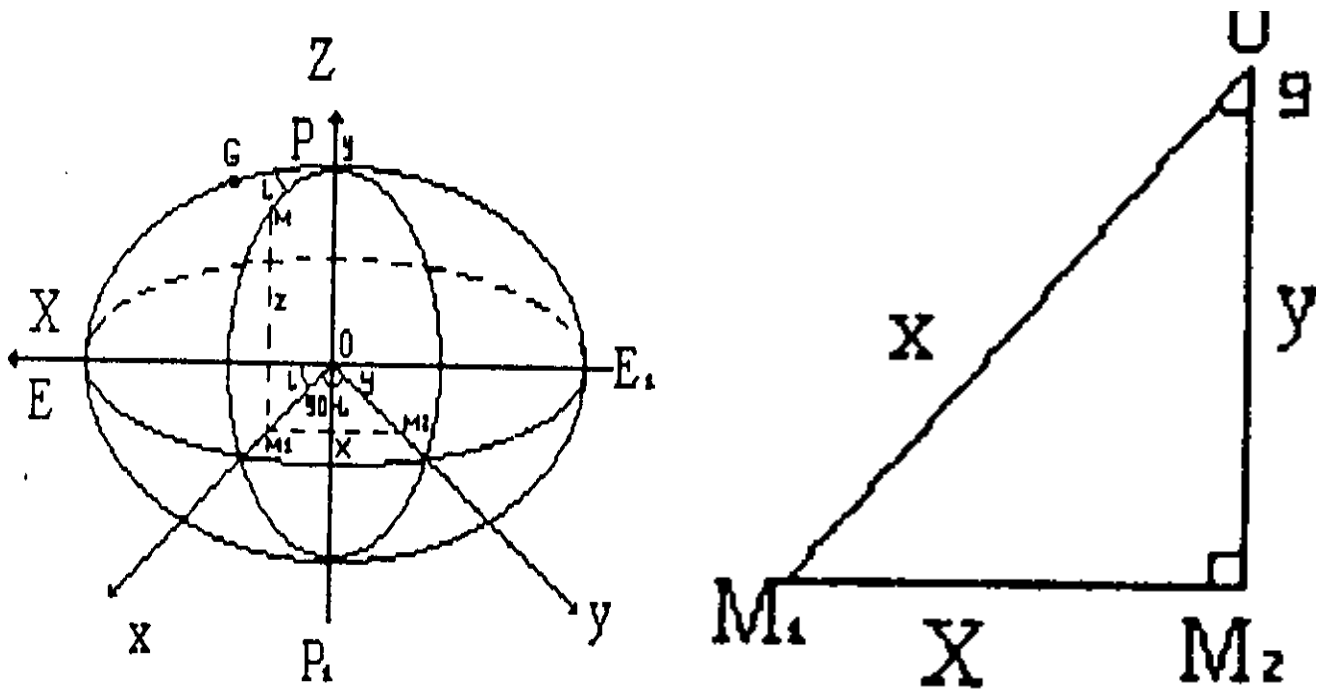
$$y = \frac{a(1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \quad (2.21)$$

Радіус паралелі точки М

$$r = mc = x = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \quad (2.22)$$

Зв'язок між просторовою системою координат X, Y, Z і координат x, y , які віднесені до площини меридіанного еліпса даної точки.

Візьмемо точку M . В меридіані точки M розташуємо систему координат x, y . PEP_1E_1 - меридіанний еліпс, в площині якого знаходиться точка O (Грінвіч) початок рахунку довгот і в цій площині знаходиться вісь OX .



З рисунку 2.9. видно, що

$$\cos(90^\circ - L) = \frac{Y}{x}; \quad \sin(90^\circ - L) = \frac{X}{x},$$

звідки $X = x \cos L$

$$Y = x \sin L$$

$$Z = y$$

(2.23)

З врахуванням формул (2.20) і (2.21), одержимо

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{a \cos B \cos L}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \\
 Y &= \frac{a \cos B \sin L}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \\
 Z &= \frac{a(1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

Сфероїдальна геодезія

Розділ 2.

Лекція 3. Обчислення довжини дуги меридіана, паралелі і площі знімальної трапеції

3.1. Головні радіуси кривизни в даній точці еліпсоїда.

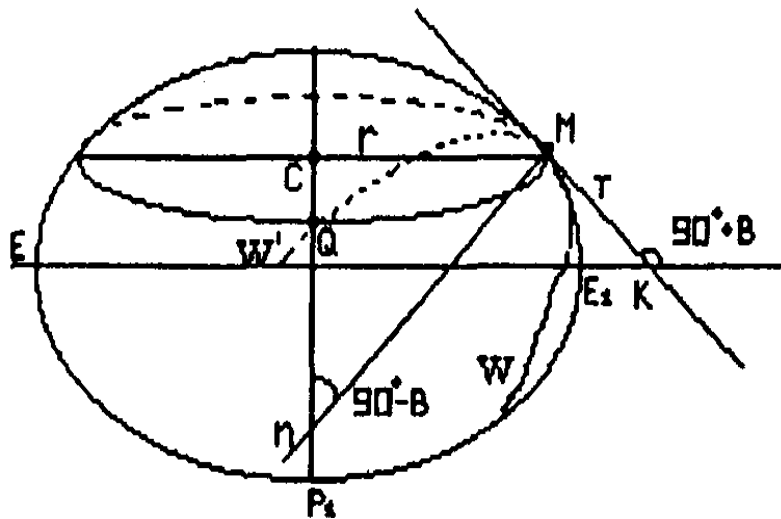


Рис. 3.1. Головні нормальні перерізи в точці **М**.

На меридіанному перерізі точки **М** проведемо нормаль. Через нормаль можна провести безліч площин. Вони називаються нормальними площинами.

Криві, що утворені від перерізів нормальних площин, проведених в даній точці з поверхнею еліпсоїда називаються нормальними перерізами.

В кожній точці еліпсоїда існує два взаємно перпендикулярних нормальних перерізи, кривизна одного з них є максимальною, а другого - мінімальною. Ці нормальні перерізи називаються головними нормальними перерізами:

- меридіональний переріз **РМКР₁Е** являє собою еліпс в точці **М**;
- переріз першого вертикала, що проходить через точку **М** і перпендикулярний до меридіонального перерізу точки **М** являє криву-еліпс **W'MW**

Існує зв'язок між кривизною і радіусом кривизни. Обернене значення кривизни є радіус кривизни.

Знайдемо радіус кривизни меридіанного перерізу.

Відомо, що радіус кривизни плоскої кривої $y = f(x)$ визначається формулою:

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \quad (3.1)$$

Із геометричного трактування похідної (див. рис. 3.1.) маємо

$$\frac{dy}{dx} = y' = \operatorname{tg}(90^\circ + B) = -\operatorname{ctg}B$$

$$\text{Тоді, } y'' = \frac{1}{\sin^2 B} \cdot \frac{dB}{dx} \quad (3.2)$$

Для визначення похідної — використаємо формулу (2.20)
 $x = a \cos B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2}$,

Тоді

$$dx = a \{-\sin B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2} - \frac{1}{2} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} (-2e^2 \sin B \cos^2 B)\} dB,$$

$$\frac{dx}{dB} = a \left\{ -\sin B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2} + e^2 \sin B \cos^2 B \cdot (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} \right\} =$$

$$-a \sin B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} \cdot \{-(1 - e^2 \sin^2 B) + e^2 \cos^2 B\},$$

або

$$\frac{dx}{dB} = -a \sin B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} (1 - e^2),$$

$$\frac{dB}{dx} = -\frac{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}}{a \sin B (1 - e^2)} \quad (3.3)$$

Враховуючи (3.3), формула (3.2) має вигляд:

$$y'' = -\frac{(1 - e^2 \sin^2)^{3/2}}{\sin^2 B \cdot a \cdot \sin B(1 - e^2)} = -\frac{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}}{a \cdot \sin^3 B(1 - e^2)}.$$

Підставимо в (3.1) значення y' і y'' та введемо позначення радіуса кривизни меридіана через M :

$$M = \frac{(1 - \text{ctg}^2 B)^{3/2} \cdot a \cdot \sin^3 B \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 B)^{3/2}},$$

$$\text{Вираз } (1 + \text{ctg}^2 B)^{3/2} = \left(\frac{1}{\sin^2 B} \right)^{3/2} = \frac{1}{\sin^3 B},$$

$$M = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 B)^{3/2}} \quad (3.4)$$

При $B = 90^\circ$ радіус кривизни (позначається як c) залежить тільки від елементів еліпсоїда:

$$c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = a \cdot \sqrt{1 + e^2}, \quad (3.5)$$

c - полярний радіус кривизни.

Введемо функції

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}, \quad (3.6)$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}, \quad (3.7)$$

які називаються основними сфероїдальними функціями.

Враховуючи формули (3.5), (3.6), (3.7), а також очевидну залежність

$$W = V \sqrt{1 - e^2}, \quad (3.8)$$

Так як

$$V = \sqrt{1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 B} = \sqrt{\frac{1 - e^2 + e^2 \cos^2 B}{1 - e^2}} = \sqrt{\frac{1 - e^2 \sin^2 B}{1 - e^2}} = W \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}$$

бо $1 + e^2(\cos^2 B - 1) = 1 + e^2 B - \sin^2 B - \cos^2 B = 1 - e^2 \sin^2 B$,

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{W^3} = \frac{c}{V^3} \quad (3.9)$$

Для визначення радіуса кривизни першого вертикалу N сформулюємо слідуєчу теорему.

Теорема Меньє. Якщо через точку до поверхні провести нормальний і похилий переріз і якщо в цій точці перерізи мають спільну дотичну, то радіус кривизни похилого перерізу дорівнює радіусу кривизни нормального перерізу помноженого на косинус кута між площинами цих двох перерізів.

Якщо WMW' - нормальний переріз, то паралель MQS_1 - похилий переріз, оскільки нормаль не лежить в площині цього перерізу. Вказані два перерізи в гочці M мають спільну дотичну MT .

Тоді радіус паралелі r :

$$r = N \cos B = MC \quad (3.10)$$

Враховуючи формулу (2.22), одержим

$$r = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = N \cos B$$

$$\text{Звідки } N = \frac{a}{1 - e^2 \sin^2 B} \quad (3.11)$$

або по аналогії з (3.9)

$$N = \frac{a}{W} = \frac{c}{V} \quad (3.12)$$

Формула (3.11) переходить у формулу (3.5) при значенні $B = 90^\circ$, як і формула (3.4), тобто на полюсі $M = N = 0$.

Для радіуса кривизни нормального перерізу, проведеного під азимутом A , служить формула Ейлера:

$$P_A = \frac{M \cdot N}{N \cdot \cos^2 A + M \cdot \sin^2 A} \quad (3.13)$$

Середній радіус кривизни R

$$R = \sqrt{MN} \quad (3.14)$$

3.2. Обчислення довжини дуги меридіана.

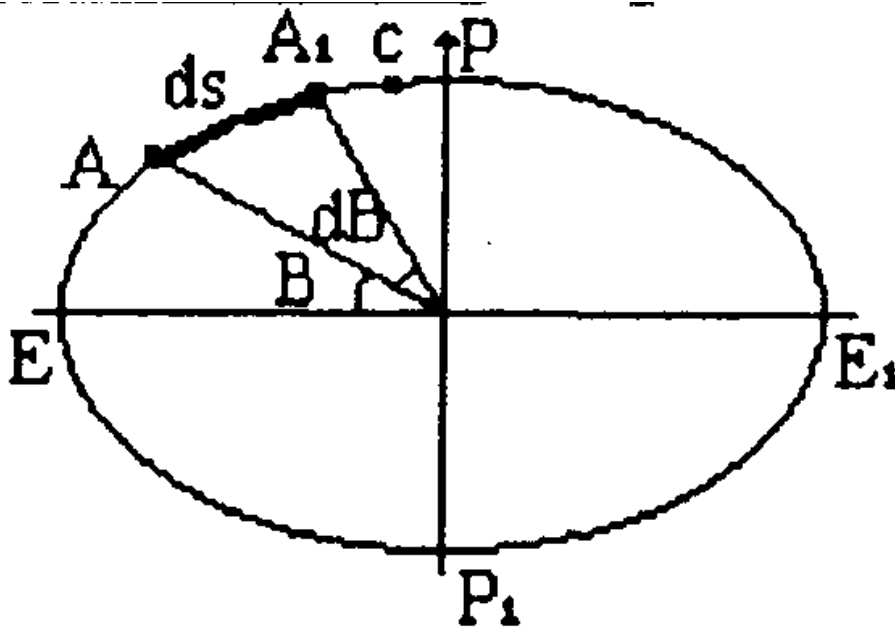


Рис. 3.2. Дуга меридіана.

Нехай точка **A** на меридіональному еліпсі має широту **B**. На безконечно малій віддалі **ds** від точки **A** візьмемо точку **A₁**, яка має широту **B + dB**. Різниця широт точок **A** і **A₁** відповідає довжині дуги меридіана **ds**.

Розглянемо елементи дуги **ds** меридіана з радіусом **M**, одержимо

$$ds = MdB,$$

або

$$ds = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 B)^3}} dB .$$

Довжина дуги між точками, які мають широти **B₁** і **B₂**, буде дорівнювати

$$S = \int_{B_1}^{B_2} \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}} dB = a(1 - e^2) \int_{B_1}^{B_2} \frac{dB}{W^3} \quad (3.15)$$

Таким чином, обчислення довжини дуги меридіана зводиться до знаходження еліптичного інтеграла.

Розкладаючи підінтегральну функцію $\frac{1}{W^3}$ в ряд за біномом Ньютона

і інтегруючи одержаний вираз з потрібною степінню точності, одержим:

$$S = a(1 - e^2) \left\{ A \frac{B_2 - B_1}{p''} - \frac{B}{2} (\sin 2B_2 - \sin 2B_1) + \frac{c}{4} (\sin 4B_2 - \sin 4B_1) \right\} \quad (3.16)$$

Для еліпсоїда Красовського
A = 1,0050517739

$$B = 0,00506237764 \quad (3.17)$$

$$C = 0,00001062451$$

Для обчислення S в триангуляції

$$S \leq 40 \text{ км},$$

$$\text{тоді} \quad S = M_m \frac{\Delta B}{p}, \quad (3.18)$$

де S представляє довжину дуги кола, а радіус буде дорівнювати радіусу меридіана M_m в точці із середньою широтою B_m

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}, \quad (3.19)$$

$$M_m = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B_m)^{3/2}} \quad (3.20)$$

Вищезгаданий інтеграл можна розв'язати чисельним методом, застосовуючи формулу Сімпсона:

$$S = \frac{1}{6} \cdot \frac{\Delta B}{p} (M_1 + 4M_m + M_2). \quad (3.21)$$

При відстанях між пунктами до 500 км формула (3.21) забезпечує точність обчислення 1-2 см.

3.3. Обчислення довжини дуги паралелі.

Паралель на еліпсоїді є коло радіус якого

$$r = N \cos B \quad (3.22)$$

Довжина дуги паралелі S_n між довготами L_1 і L_2 буде дорівнювати добутку радіуса паралелі на відповідний центральний кут dL .

$$S_{\text{паралелі}} = r \frac{(L_2 - L_1)''}{p''} = N \cos B \frac{(L_2 - L_1)''}{p''} \quad (3.23)$$

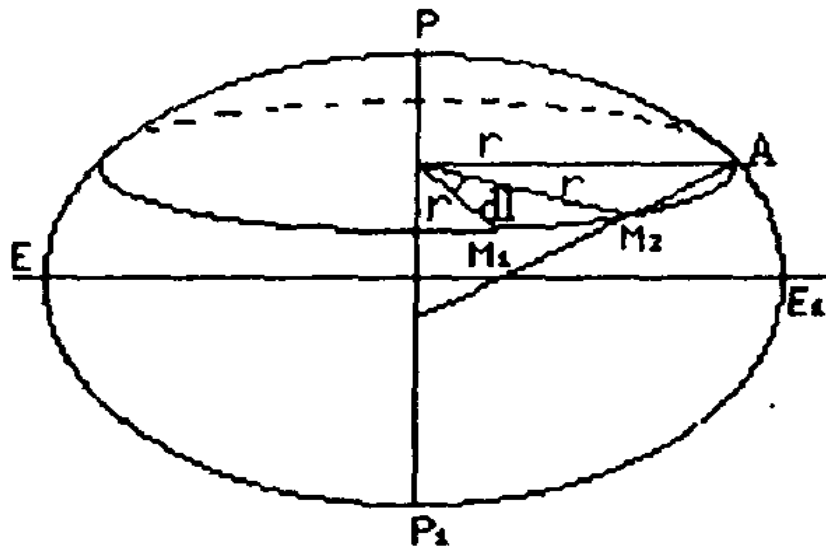
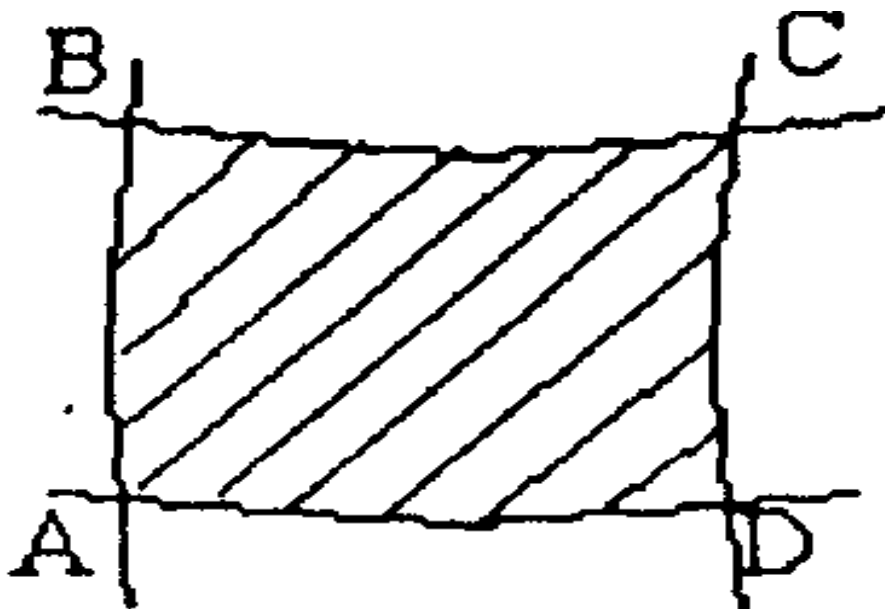


Рис. 3.3. Довжина дуги паралелі

3.4. Обчислення площ знімальних трапецій.

Знімальна трапеція - це ділянка поверхні земного еліпсоїда, обмежена лініями меридіанів та паралелей, що визначається номенклатурою листів топографічної карти.

Обчислення площі знімальної трапеції або листа карти зводиться до визначення площі частини поверхні еліпсоїда, обмеженої лініями меридіанів і паралелей.



- трапеції

Нехай **АВСО**
нескінченно мала
на еліпсоїді.

Сторони-

елементи дуг меридіанів

$$AB = CD = MdB,$$

елементи дуг паралелей

Рис.3.4. Площа знімальної трапеції

$$AD = BC = N\cos Bdl$$

У системі геодезичних координат \mathbf{B} , \mathbf{L} площа нескінченно малої трапеції, обмеженої паралелями з широтою B і $B + dB$ і меридіанами з різницею довгот dL , виражається формулою

$$dP = MN \cos B dB dL, \quad (3.24)$$

де dL - різниця довгот.

Площа кінцевої трапеції, обмеженої широтами B_2 і B_1 і довготами L_2 і L_1 , виразиться подвійним інтегралом.

$$P = \int_{B_1}^{B_2} \int_{L_1}^{L_2} MN \cos B dB dL \quad (3.25)$$

Виконуючи інтегрування за L , одержимо

$$P = b^2 (L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} \cos B dB \quad (3.26)$$

Інтеграл у правій частині формули (3.26) виражається в елементарних функціях, однак для одержання більш зручної для обчислень робочої формули, підінтегральний вираз розкладають у ряд за степенями e^2 і інтегрують почленно. В результаті одержують формулу:

$$P = \frac{2b^2 (L_2 - L_1)''}{p''} [A' \sin \frac{1}{2} (B_2 - B_1) \cos B_m - B' \sin \frac{3}{2} (B_2 - B_1) \cos 3B_m + c' \sin \frac{5}{2} (B_2 - B_1) \cos 5B_m - (3.27)$$

в якій коефіцієнти A' , B' , C' і т.п. є відомими функціями ексцентриситету угіпсоїда. Для еліпсоїда Красовського

$$A' = 1,003364; B' = 1,1240 \cdot 10^{-3}; C' = 1,699 \cdot 10^{-6}.$$

$$b = 6356,86301877 \text{ км.}$$

При обчисленні площі з точністю до $0,01 \text{ км}^2$. У більшості випадків можна в формулі (3.27) обмежитись членами з коефіцієнтами тільки A' і B' .

З відносною похибкою, яка не перевищує $2 \cdot 10^{-5}$, площу трапеції можна для контролю розрахувати за формулою

$$P = 75456,8(L_2 - L_1)^\circ [\arcsin(K \sin B_2) - \arcsin(K \sin B_1)], \quad (3.28)$$

де $K = 0,163133$.

Формула (3.28) одержана наближеною апроксимацією інтеграла (3.26) аналітичним виразом, в який входить параметр K , і визначенням числового значення цього параметра з відомою площею поверхні еліпсоїда Красовського, розрахованою за точною формулою.

Якщо задана номенклатура трапеції, площу якої необхідно обчислити, то перш за все необхідно визначити геодезичні координати B і L її вершин. Для

цього спочатку з допомогою бланкової номенклатури карти знаходять координати вершин трапеції масштабу 1:1000000, а потім за стандартною процедурою (шляхом ділення масштабів) геодезичні координати вершин заданої певним масштабом трапеції.

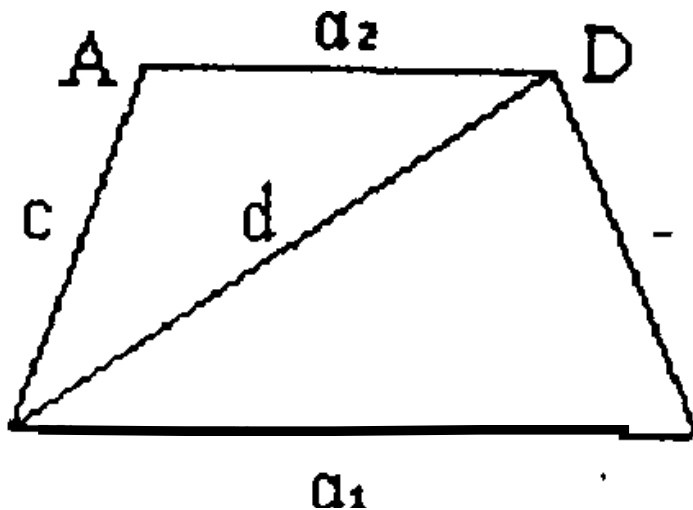
3.5. Розрахунок рамок знімальної трапеції.

Одержані раніше формули дозволяють легко знайти вирази для розмірів рамок знімальних трапецій.

Нехай ми маємо знімальну трапецію масштабу $1/m$ з широтою південної паралелі B_1 північної B_2 і різницею довгот західного і східного меридіанів трапеції Δl (див. рис. 3.5).

Очевидно, що західні та східні рамки трапеції рівні і представляють собою дуги меридіанів між паралелями з широтами B_1 і B_2 . Тому

Рис.3.5. Знімальна трапеція



$$AB = CD = c = \frac{\Delta B''M}{p''}, \quad (3.39)$$

де $\Delta B = B_2 - B_1$

Північна і південна рамки є дугами паралелей, які мають широти B_2 і B_1

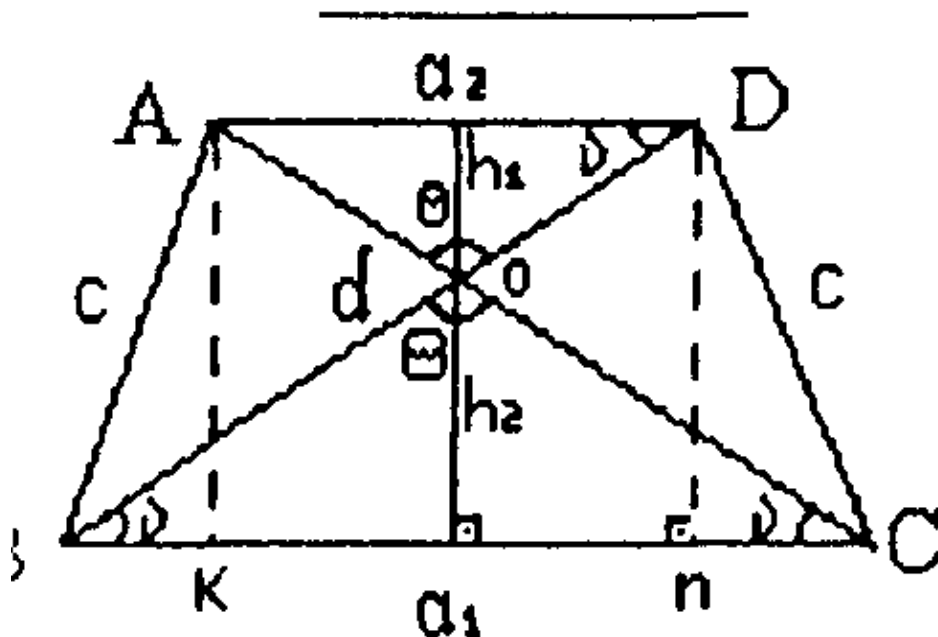
тому

$$\left. \begin{aligned} BC = a_1 &= \frac{\Delta l'' \cos B_1 \cdot N}{p''} \\ AD = a_2 &= \frac{\Delta l'' \cos B_2 \cdot N}{p''} \\ d &= \sqrt{a_1 a_2 + c^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Для одержання розмірів рамок в заданому масштабі необхідно знайдені величини розділити на знаменник масштабу, а для одержання розмірів сторін трапеції в сантиметрах необхідно помножити на 100.

Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.
(3.31)

3.6. Деякі контрольні співвідношення при розрахунку розмірів рамок знімальної трапеції.



Для графічного контролю побудови знімальної трапеції використовують формулу розрахунку діагоналі d.

Однак, має сенс одержати контрольні формули при розрахунку рамок трапеції. Приймаючи до уваги рівність кутів, утворених паралельними прямими діагоналю d на основі теореми косінусів запишемо.

Рис. 3.6. Знімальна трапеція

$$c^2 = a_1^2 + d^2 - 2 a_1 d \cos \nu \quad (3.32)$$

$$c^2 = a_2^2 + d^2 - 2 a_2 d \cos \nu \quad (3.33)$$

Представим дані вирази у слідуючому вигляді

$$2 a_1 d \cos \nu = a_1^2 + d^2 - c^2 \quad (3.34)$$

$$2 a_2 d \cos \nu = a_2^2 + d^2 - c^2 \quad (3.35)$$

розділивши (3.34) на (3.35), одержимо

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1^2 + d^2 - c^2}{a_2^2 + d^2 - c^2} \quad (3.36)$$

Вираз (3.36) можна використати для контролю обчислень розмірів рамок трапецій.

Представим (3.36) у вигляді

$$\begin{aligned} a_1 a_2^2 + a_1 d^2 - a_1 c^2 &= a_2 a_1^2 + a_2 d^2 - a_2 c^2, \\ d^2 (a_1 - a_2) &= c^2 (a_1 - a_2) + a_1 a_2 (a_1 - a_2) \\ d^2 &= c^2 + a_1 a_2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Формулу (3.37) використовують для розрахунку довжин дуги діагоналі. Віднімаючи від (3.32) вираз (3.33), будемо мати

$$a_1^2 - a_2^2 - 2a_1 d \cos \nu = 2a_2 d \cos \nu = 0 \quad (3.38)$$

$$d^2 (a_1 - a_2) = c^2 (a_1 - a_2) + a_1 a_2 (a_1 - a_2)$$

$$\cos \nu = \frac{a_2 + a_1}{2d} \quad (3.39)$$

Із прямокутного трикутника ВСп, запишемо

$$\sin \nu = \frac{h}{d} \quad (3.40)$$

розділивши (3.40) на (3.39), запишем

$$\frac{\sin \nu}{\cos \nu} = \operatorname{tg} \nu = \frac{2h}{(a_1 + a_2)} \quad (3.41)$$

Із виразів (3.40) і (3.41) можливо використати слідувачі контрольні співвідношення

$$\left. \begin{aligned} h &= d \sin \nu \\ h &= \frac{a_1 + a_2}{2} \operatorname{tg} \nu \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Визначивши по формулі (3.40) кут ν , по формулам (3.42) можна виконати контроль обчислень.

На основі властивостей рівнобічної трапеції, запишемо

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{h_1}{\frac{a_2}{2}}$$

$$\text{і} \quad h_1 = \frac{a_2 \operatorname{tg} \nu}{2}, \quad (3.43)$$

$$\text{по аналогії} \quad h_2 = \frac{a_1}{2} \operatorname{tg} \nu; \quad (3.44)$$

$$h = h_1 + h_2 \quad (3.45)$$

Формули (3.43), (3.44), (3.45) також можна використати як контрольні. Найкраще для контролю використовувати наступні формули

$$h = \sqrt{c^2 - \left[\frac{a_1 - a_2}{2} \right]^2}, \quad (3.46)$$

$$h = \sqrt{d^2 - \left[\frac{a_1 + a_2}{2} \right]^2},$$

$$\text{де} \quad nD = \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right);$$

$$Bn = a_1 - \frac{a_1 - a_2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Лекція 4 Розв'язування малих сферичних і сфероїдальних трикутників

Після одержання кінцевих значень вимірних напрямків або кутів на поверхні еліпсоїда переходять до розв'язання трикутників. Ця задача полягає в послідовному обчисленні довжин сторін трикутників триангуляції, коли відома одна сторона і кут в кожному трикутнику. В зв'язку з близькістю земного еліпсоїда до сфери різниця між сфероїдальними та сферичними трикутниками мала і обчислення трикутників триангуляції зводиться до розв'язування сферичних трикутників.

Якщо розв'язувати трикутники за формулами сферичної тригонометрії, то сторони необхідно виражати в частинах радіуса, що незручно, так як сторони повинні бути виражені в метрах.

Тому трикутники триангуляції розв'язують особливими методами, використовуючи теорему Лежандра

4.1.Розв'язання сферичних трикутників за теоремою Лежандра.

Нехай $A B C$ - сферичний трикутник з сторонами в лінійній мірі a, b, c . За сторонами a, b, c побудуємо плоский трикутник A_1, B_1, C_1 .

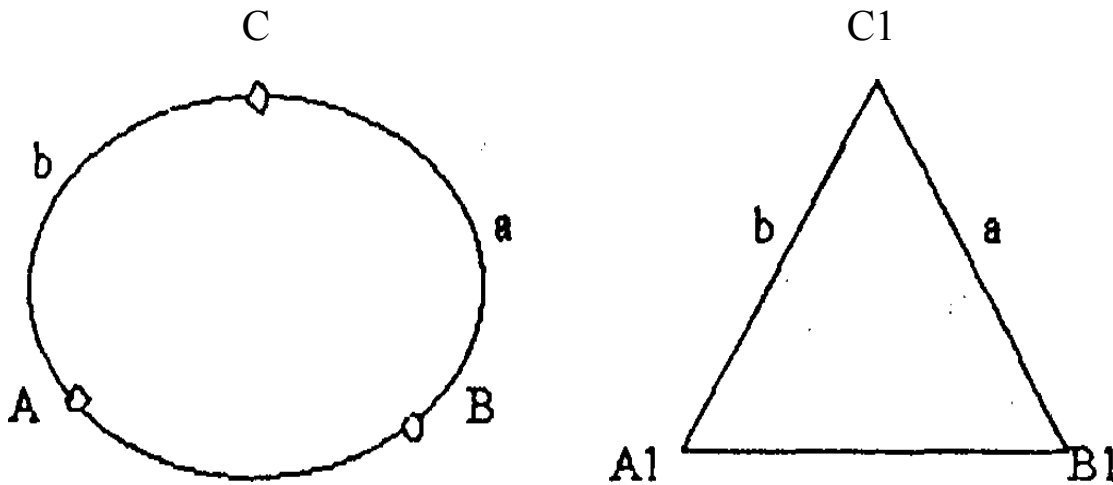


Рис.4.1 .Принцип рішення сферичного трикутника по способу Лежандра.

Необхідно знайти різниці кутів сферичного трикутника $A B C$ і плоского $A_1 B_1 C_1$. Знаючи різниці $A-A_1$; $B-B_1$; $C-C_1$ переходять від сферичних кутів до плоских з однаковими довжинами сторін.

Якщо позначити через R радіус кулі, на якому побудовано сферичний трикутник і застосувати формулу косинуса сторони для сферичного трикутника $A B C$, запишемо:

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} * \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} * \sin \frac{c}{R} * \cos A \quad (4.1)$$

звідки:

$$\cos A = \frac{\cos \frac{a}{R} - \cos \frac{b}{R} * \cos \frac{c}{R}}{\sin \frac{b}{R} * \sin \frac{c}{R}} \quad (4.2)$$

Розкладемо в ряд і обмежимося трьома членами ряду:

$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots; \quad (4.3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots \quad (4.4)$$

Тоді:

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{\left(1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4}\right) - \left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4}\right)}{\left(\frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3}\right)\left(\frac{c}{R} - \frac{c^3}{6R^3}\right)} = \\ &= \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2R^2} + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2}{24R^4}}{\frac{bc}{R^2}\left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6R^2}\right)}; \end{aligned}$$

В дальнішому приймем до уваги, що:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x; \quad (4.5)$$

розкладаючи

$$\left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6R^2}\right) = T$$

в ряд і обмежувачись другим членом розкладу, одержимо:

$$T = \left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6R^2}\right) \quad (4.6)$$

тоді :

$$\begin{aligned} \cos A &= \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2}{24R^2bc}\right) \left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6R^2}\right) = \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2 + 2b^4 + 2b^2c^2 - 2b^2a^2}{24R^2bc} + \\ &+ \frac{2b^2c^2 + 2c^4 - 2a^2c^2}{24R^2bc} \end{aligned}$$

При цьому шостою степінню нехтуємо.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2}{24R^2bc}; \quad (4.7)$$

Чому дорівнює така сама сторона у такому трикутнику?

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A_1; \quad (4.8) \quad \cos A_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad (4.9)$$

Із тригонометрії:

$$\sin^2 A_1 = 1 - \cos^2 A_1 = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2,$$

$$\sin^2 A_1 = 1 - \frac{b^4 + c^4 + a^4 + 2b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2}{4b^2c^2},$$

$$\sin^2 A_1 = \frac{4b^2c^2 - b^4 - c^4 - a^4 - 2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2}{4b^2c^2},$$

$$\sin^2 A_1 = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2}{4b^2c^2};$$

(4.10)

Ліву і праву частину помножимо на

$$\frac{bc}{6R^2} \sin^2 A_1 = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2}{24R^2bc} \quad (4.11)$$

Замітим, що другий член виразу (4.7) дорівнює правій частині (4.11) з оберненим знаком. Тоді, другий член правої частини формули (4.7) буде :

$$\cos A = \cos A_1 - \frac{bc}{6R^2} \sin^2 A_1 \quad (4.12)$$

Звідси:

$$\cos A - \cos A_1 = -\frac{bc}{6R^2} \sin^2 A_1; \quad (4.13)$$

Різницю косинусів замінимо її значення

$$2 \sin \frac{A - A1}{2} \sin \frac{A + A1}{2} = \frac{bc}{6R^2} \sin^2 A1$$

Сума кутів сферичного трикутника відрізняється від суми кутів плоского трикутника на ексцес-сферичний надлишок, який є невеликою величиною

$$\sin \frac{A - A1}{2} = \frac{A - A1}{2} ; \quad \sin \frac{A + A1}{2} = \sin A1 ,$$

$$(A - A1) \sin A1 = \frac{bc}{6R^2} \sin^2 A1 ; \quad A - A1 = \frac{bc}{6R^2} \sin A1$$

(4.14)

Площа плоского трикутника:

$$P = \frac{bc \sin A1}{2} ; \quad (4.15)$$

Тоді:

$$A - A1 = \frac{P}{3R^2} ; \quad (4.16)$$

Або:

$$(A - A1)' = \frac{P}{3R^2} p'' ; \quad (B - B1)' = \frac{P}{3R^2} p'' ;$$

$$(C - C1)' = \frac{P}{3R^2} p'' ;$$

Додаючи всі рівняння одержимо:

$$(A + B + C) - (A1 + B1 + C1) = \frac{P}{R^2} p'' \quad (4.17)$$

$$(A + B + C) = 180 + \frac{P}{R^2} p''$$

Таким чином:

$$E'' = \frac{P}{R^2} p'' = \frac{bc \sin A1}{2R^2} p'' = \frac{b^2 \sin A1 \sin C1}{\sin B1} * \frac{p''}{2R^2}$$

(4.18)

Шукані значення кутів плоского трикутника в кінцевому виді мають такий вигляд

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A - \frac{E}{3}, \\ B_1 &= B - \frac{E}{3}, \\ C_1 &= C - \frac{E}{3}, \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Теорема Лежандра .Якщо сторони плоского і сферичного трикутників рівні, то кут плоского трикутника дорівнює відповідному куту сферичного трикутника зменшеного на третину сферичного надлишку.

Кути A_1, B_1, C_1 називають плоскими приведеними кутами.

Більш точні формули:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A - \frac{E}{3} - \frac{En}{60}(m^2 - a^2) \\ B_1 &= B - \frac{E}{3} - \frac{En}{60}(m^2 - b^2) \\ C_1 &= C - \frac{E}{3} - \frac{En}{60}(m^2 - c^2) \\ m^2 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}; n = \frac{n_A + n_B + n_C}{3}, \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Обернена величина радіусу кривизни в точці розраховується по формулі:

$$n_B = \frac{1}{R_B^2}, n_C = \frac{1}{R_C^2}, n_A = \frac{1}{R_A^2}; \quad (4.21)$$

Замітка. Кути в триангуляції 1 класу обчислюються до 0.001".

Формулами (4.19) або (4.20) без останніх членів можна знаходити плоскі приведені кути при довжині сторін до 200км (до 200км можна вважати, що сторони трикутника розташовані на сфері). В сферичні трикутники з сторонами більше 200км і сфероїдальні трикутники потрібно вводити поправки:

$$\left. \begin{aligned} A1 &= A - \frac{E}{3} - \frac{En}{60}(m^2 - a^2) - \frac{E}{12} * \frac{n_A - n}{n}, \\ B1 &= B - \frac{E}{3} - \frac{En}{60}(m^2 - b^2) - \frac{E}{12} * \frac{n_B - n}{n}, \\ C1 &= C - \frac{E}{3} - \frac{En}{60}(m^2 - c^2) - \frac{E}{12} * \frac{n_C - n}{n}, \end{aligned} \right\} (4.22)$$

4.2. Розв'язування сферичних трикутників по способу аддитаментів.

В теоремі Лежандра поправки вводились в кути. Можливо використовувати і сферичні кути з введенням поправок в сторони, Для сферичного трикутника А В С по теоремі синусів запишемо:

$$\sin \frac{b}{R} = \sin \frac{a}{R} * \frac{\sin B}{\sin A};$$

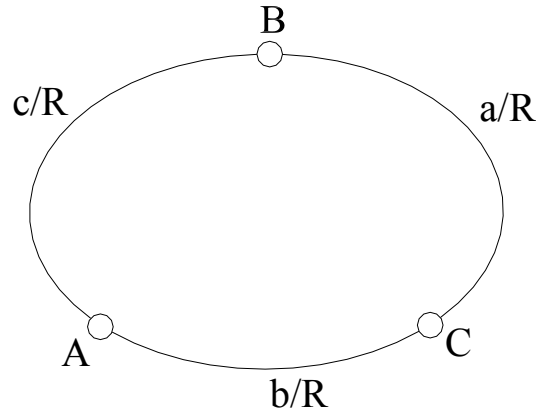


Рис. 4.2 Принцип рішення сферичного трикутника по способу аддитаментів

Розкладаючи в ряд, і обмежуючись першим членом до четвертої степені, одержимо:

$$\frac{b}{R} \left(1 - \frac{b^2}{6R^2} \right) = \frac{a}{R} \left(1 - \frac{a^2}{6R^2} \right) \frac{\sin B}{\sin A}; \quad (4.23)$$

Введемо позначення;

$$A_a = \frac{a^3}{6R^2} = ka^3; a - ka^3 = a'; \quad (4.24)$$

Тоді:

$$b' = \frac{a' \sin B}{\sin A},$$

$$b = \frac{a' \sin B}{\sin A} \left(1 + \frac{b^2}{6R^2} \right) = b' + \frac{b'^3}{6R^2}; \quad (4.25)$$

$$\left. \begin{aligned} A_b = kb^3; b = b' + A_b; \\ A_c = kc^3; c = c' = A_c; \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Де величини A_a, A_b, A_c називаються аддитаментами,

$$k = \frac{1}{16} * R^2, R = \sqrt{MN}; \quad (4.27)$$

R -середній радіус кривизни еліпсоїда для району розміщення трикутника. Таким чином, ідея способу аддитаментів, запропонованого І. Зольднером в

1820р. заключається в тому, що сторони сферичного трикутника a, b, c виправляють поправками, в результаті чого одержують сторони плоского трикутника a', b', c' і невідомі сторони плоского трикутника.

Порядок обчислення.

1. Із вихідної сторони b віднімають її аддитамент Ab і одержують сторону плоского трикутника b' .

2. За відомими кутами сферичного трикутника і стороною b' розв'язують трикутник як плоский, використовуючи теорему синусів і знаходять решту сторін плоского трикутника a' і c' .

3. Одержані значення сторін виправляють їх аддитаментами Aa, Ac і знаходять шукані сторони сферичного трикутника ABC .

Спосіб аддитаментів застосовується як контрольний при рішенні трикутників за теоремою Лежандра.

Для України можна прийняти:

$$k = \frac{1}{6R^2} = 409 * 10^{-11}.$$

РОЗДІЛ 4.

Лекція №5. Дослідження кривих на еліпсоїді обертання

5.1. Поняття про взаємні нормальні перерізи.

1. Співвідношення між довжиною дуги кола b і довжиною дуги нормального перерізу S .

Переріз земного еліпсоїда площиною, що проходить через нормаль до його поверхні в даній точці називається нормальним перерізом.

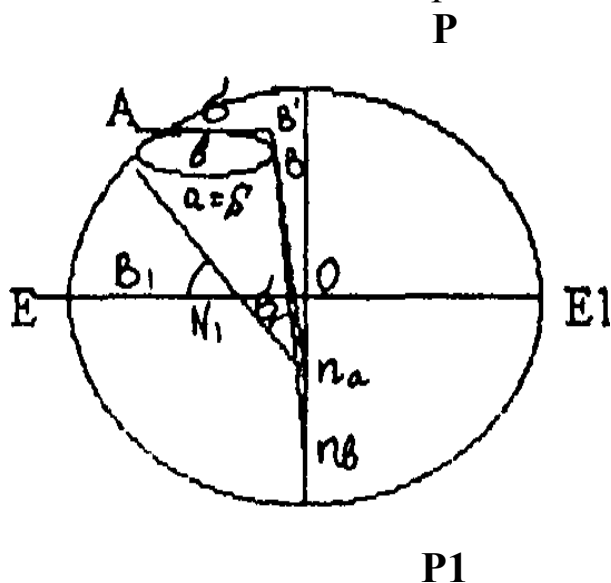


Рис.5.1. Довжини дуги кола і нормального перерізу.

Якщо на поверхні еліпсоїда візьмемо точки A і B з широтами $B1$ і $B2$, то

нормалі до еліпсоїда будуть n_a і n_b . Вони не перетинаються, а перетинають малу піввісь в точках n_a і n_b . Якщо провести площини через нормалі в точках А і В, то вони перетнуть еліпсоїд по нормальних перерізах АаВ—прямий нормальний переріз в точці А на точку В і обернений нормальний переріз з точки В на точку А. Криві АаВ і ВbА називаються взаємно оберненими нормальними перерізами.

Побудуємо в площині нормального перерізу АВна із центра n_x радіусом $An_a = N$ дуги. Одержимо точку В'.

Співвідношення між довжиною дуги кола b і довжиною дуги нормального перерізу S .

$$\sigma'' = \frac{S}{N_1} \cdot p'' \cdot \left(1 + \frac{e^2 S^2}{6N_1} \cos^2 B_1 \cos^2 A_{12} \right); \quad (5.1)$$

Де B_1 —широтй точки А,

A_{12} — азимут нормального перерізу з точки А на точку В, або:

$$\sigma'' = S[2]_1 \cdot \left(1 + \frac{e^2 S^2}{6N_1} \cos^2 B_1 \cos^2 A_{12} \right) \quad (5.2)$$

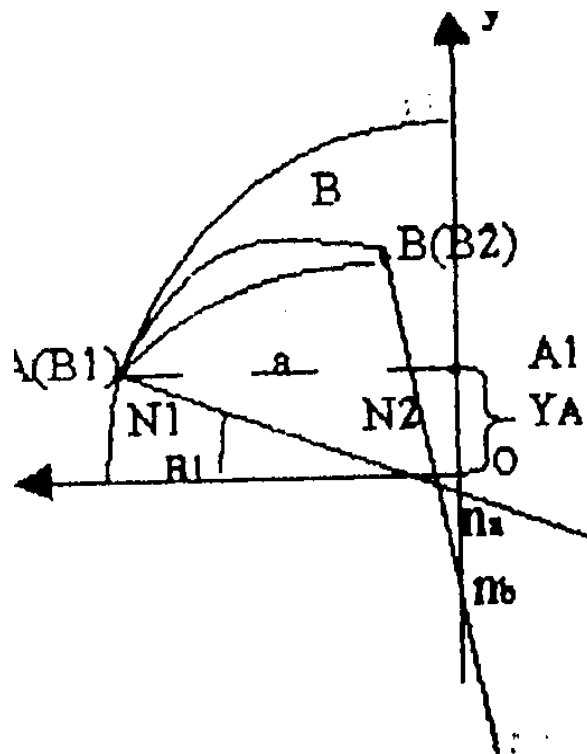
При $S < 150$ км з забезпеченням точності до 0,0001"

Де:

$$[2]_1 = p'' / N_1$$

2.Поняття про взаємні нормальні перерізи.

Приведем нормаль n_a до точки А, яка знаходиться на поверхні еліпсоїда. Приведем нормальний переріз з точки А в точку В. Сумістимо з малою віссю обертання вісь у. Друга координатна лінія буде суміщена з другою піввіссю. $OA_1 = YA$



Рис,5.2. Взаємні нормальні перерізи,

Тоді: $OA_1 = Y_A = \frac{a(1 - e^2) \sin B_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} ; \quad (5.4)$

$$A_1 n_A = N_1 \sin B_1 ,$$

$$On_A = A_1 n_a - OA_1 = \frac{a \sin B_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} - \frac{a(1 - e^2) \sin B_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} ;$$

Звідси: $On_A = \frac{a - e^2 \sin B_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} ; (5.5) \quad On_b = \frac{a \cdot e^2 \sin B_2}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin B_2}} ; (5.6)$

В розглянутому нами випадку $B_2 > B_1$. Точка В лежить не на тому самому меридіані, що і А і має більшу широту, з формул (5.5) і (5.6) $On_b > On_a$.

Радіуси кривизни першого вертикала перетинаються з віссю а. Нормалі схрещуються в просторі, але не перетинаються.

Якщо проведемо площини через точки ABn_a , Abn_b , то ці площини дадуть в перетині з еліпсоїдом взаємно нормальні перерізи. AbB буде оберненим нормальним перерізом до перерізу AaB .

5.2. Вимірювання кута на поверхні еліпсоїда.

Вимірюючи кут в точці A , при тій самій установці приладу одержим два різні нормальні перерізи.

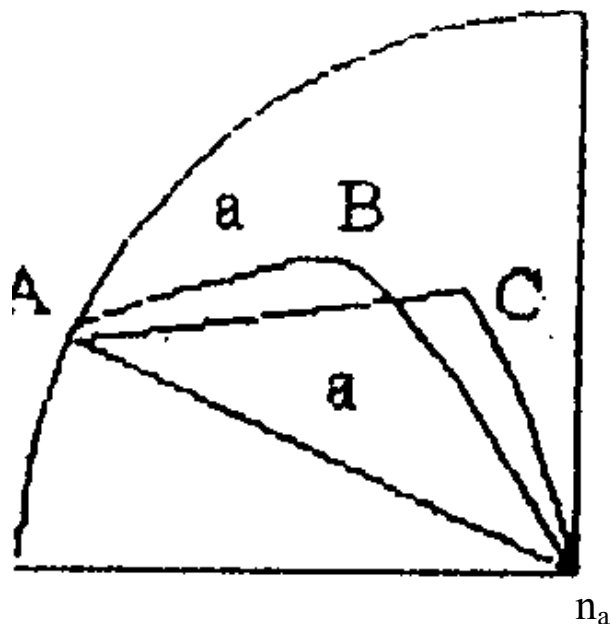


Рис.5.3. Вимірювання кута.

Криві AaB і AaC —нормальні прямі перерізи з точки A на точки B і C . Кут $BACn_a$ —двогранний між прямими нормальними перерізами в точці A . Розглянемо на прикладі трикутника тріангуляції, який проєктований на еліпсоїд.

Горизонтальні кути не утворюють замкнутого трикутника. Невизначеність в кутах можна обійти, якщо вершини трикутника з'єднати геодезичною лінією

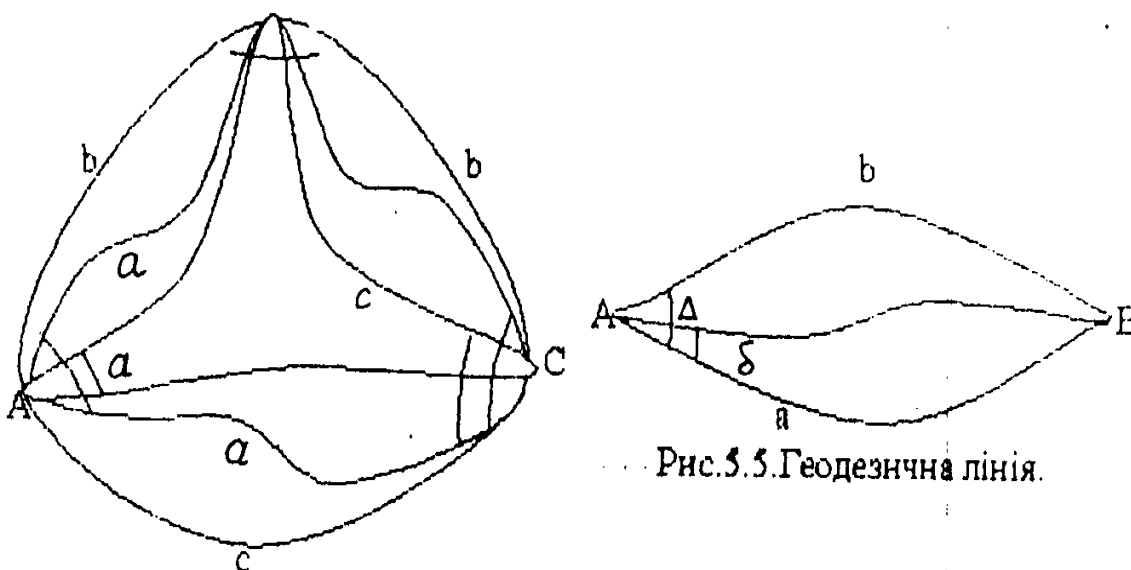


Рис.5.5. Геодезична лінія.

Рис.5.4. Виміряні кути в трикутнику тріангуляції.

Таким чином, прямі нормальні перерізи дають невизначеність при вимірюванні кутів. Щоб уникнути невизначеності, з'єднують пункти найкоротшою лінією між двома пунктами на поверхні - геодезичною лінією.

На площині геодезична лінія є прямою, на кулі—довжина дуги великого кола, на циліндрі—гвинтова лінія.

5.3. Поняття про геодезичну лінію на поверхні еліпсоїда обертання.

Геодезичною лінією на будь-якій поверхні називається крива, в кожній точці якої стична площина проходить через нормаль до поверхні в цій же точці.

Стичною площиною кривої називають площину, яка проходить через дотичну до кривої в даній точці і деяку іншу точку на кривій безмежно близько розташованій до точки дотику.

Для того, щоб визначити геодезичну лінію АВ. на поверхні еліпсоїда, необхідно знати перший елемент геодезичної лінії. Поставивши прилад в точці А і знівелювавши його, візуємо на точку В і по цьому напрямку віднімаємо точку S. В точці А висота співпадає з нормаллю. Одержим елемент геодезичної лінії Аа. Далі ставим прилад в точці а. Наводим трубу теодоліта на точку А, закріплюємо лімб і повертаємо трубу на 180 і на поверхні еліпсоїда на безмежно малій віддалі дістанемо точку в і т.п.

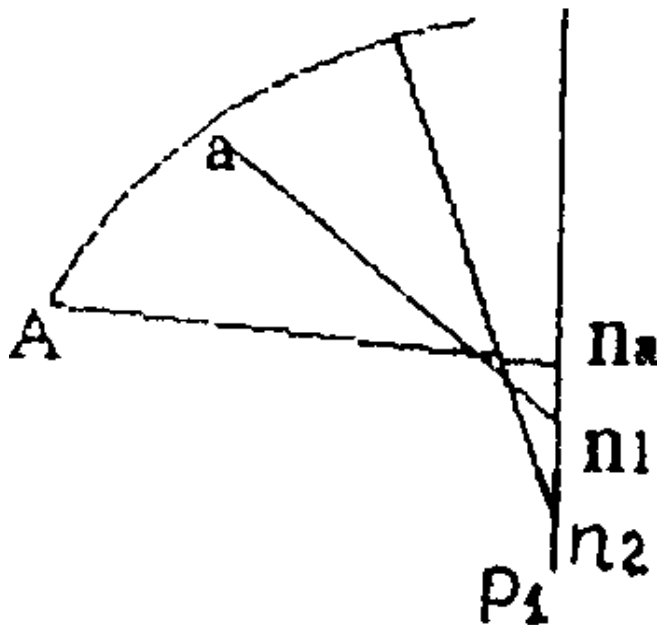


Рис. 5.6. Геодезична лінія АВ.

В кінці отримаємо точку В. Відрізок Аав є дотичною в точці а. Цей відрізок лежить в стичній площині. Він є частиною якоїсь геодезичної лінії.

Геодезична лінія в точці А ділить кут ВвА і ВаА у відношенні 1:2.

Одержим геодезичну лінію. Невизначеність зникає. Геодезична лінія проходить ближче прямого нормального перерізу. Ділять на три частини.

Якщо кут трикутника є кут між взаємними нормальними перерізами, то

Із рис. 5.8. запишем:

$$\left. \begin{aligned} MdB &= dS \cos A \\ rdl &= dS \sin A \end{aligned} \right\}; \quad (5.10)$$

Тоді:

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= M \cdot \frac{dB}{dS} \\ \sin A &= r \cdot \frac{dl}{dS} \end{aligned} \right\}; \quad (5.11)$$

Помножимо верхнє рівняння на drA

$$drA \cos A = Mr \frac{dB}{dS} dA; \quad (5.12)$$

Проведемо геодезичну паралель в точці B' .

$$A + dA - (A - E) = dA + E$$

$$A - E = 90^\circ - (90^\circ - A + E)$$

Запишемо формулу косинуса елемента для прямокутного трикутника, що дорівнює добутку котангенсів двох інших елементів суміжних з ним.

$$\cos[90^\circ - (B + dB)] = ctgdl \cdot ctg[90^\circ - (dA + E)]$$

Тоді:

$$\sin(B + dB) = ctgdl \cdot tg(dA + E)$$

$$tg(dA + E) = tgdl \cdot \sin(B + dB); \quad (5.13)$$

dA і dl малі величини, що дає можливість розкласти тангенс в ряд і обмежитись першим членом розкладу. Крім того $dBdl$ величина другого порядку малості, а E —це добуток двох сторін на синус кута між ними ($MdB rdl$)

Тоді:

$$dA = dl \sin B; \quad (5.14)$$

Підставляючи (5.14) у праву частину (5.12), одержимо:

$$r \cdot dA \cdot \cos A = M \cdot r \cdot \frac{dB}{dS} \cdot dl \cdot \sin B; \quad (5.15)$$

Помножимо ліву і праву частину другого виразу (5,15) на dr

$$dr \cdot \sin A = r \cdot dr \cdot \frac{dl}{dS}$$

Підставимо (5.8) у праву частину

$$dr \cdot \sin A = -r \cdot \frac{dl}{dS} \cdot M \cdot dB \cdot \sin B ; \quad (5.16)$$

Додамо ліві частини (5.15) і (5.16)

$$r \cdot \cos A \cdot dA + dr \cdot \sin A = 0 ; \quad (5.17)$$

Це повний диференціал, інтеграл якого дорівнює $r \sin A = C$ (5.18)

Теорема доказана.

Представим через функцію приведенної широти

$$\left. \begin{aligned} r = x = a \cdot \cos u \\ y = b \cdot \sin u \end{aligned} \right\} ; \quad (5.19)$$

Тоді:

$$a \cdot \cos u \cdot \sin A = C ; \quad (5.20)$$

Якщо маємо ряд точок

$$\left. \begin{aligned} a \cos u_1 \sin A_1 = a \cos u_2 \sin A_2 = \dots = C \\ \cos u_1 \sin A_1 = \cos u_2 \sin A_2 = const \end{aligned} \right\} ; \quad (5.21)$$

Для геодезичної лінії на поверхні еліпсоїда обертання добуток косинуса приведенної широти точки геодезичної лінії на синус азимута геодезичної лінії в тій же точці є величина постійна.

В загальному вигляді диференціальне рівняння геодезичної лінії є рівняння Ейлера для варіаційної проблеми найкоротшої відстані між двома точками.

$$\frac{dA}{dS} = \frac{\operatorname{tg} B}{N} \cdot \cos A ; \quad (5.22)$$

Лекція №6. Перехід від нормального перерізу до геодезичної лінії

6.1. Визначення лінійного розходження між взаємними нормальними перерізами

На еліпсоїді маємо два нормальні перерізи в точці А-прямий АаВна і обернений АвВна, В точці А радіусом 1 проведемо сферичний трикутник

Між взаємними нормальними перерізами утворюється кут f і винесем лінійний елемент.

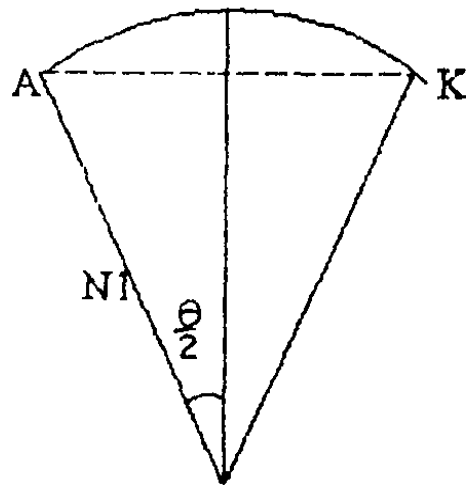
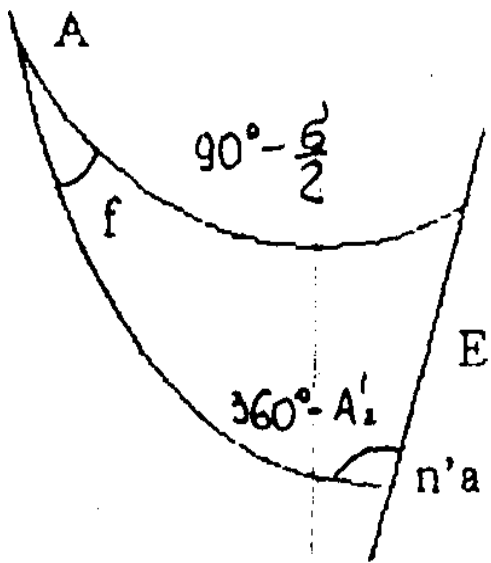
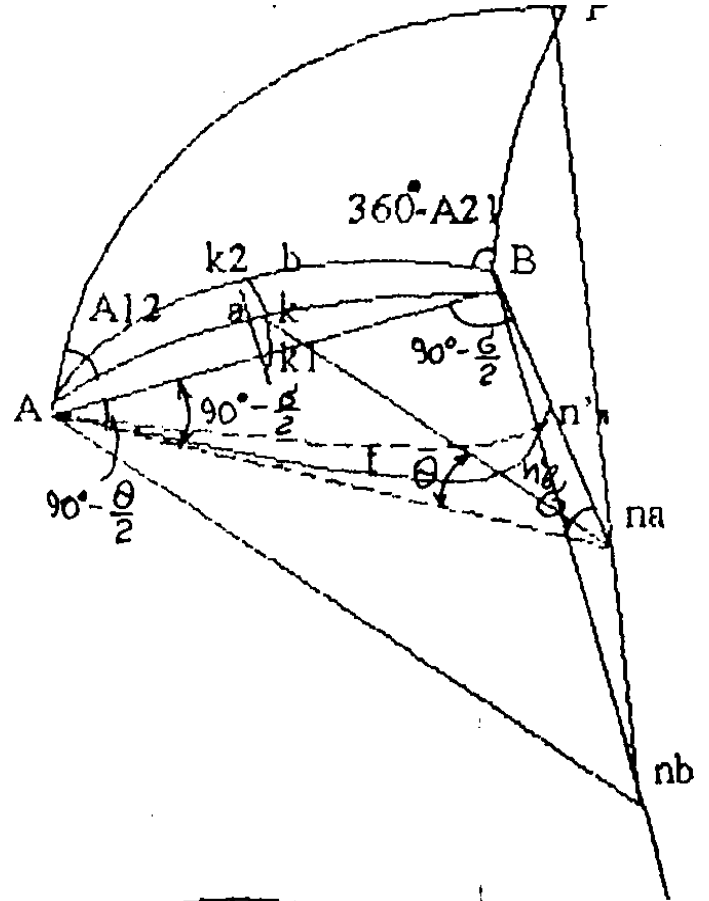
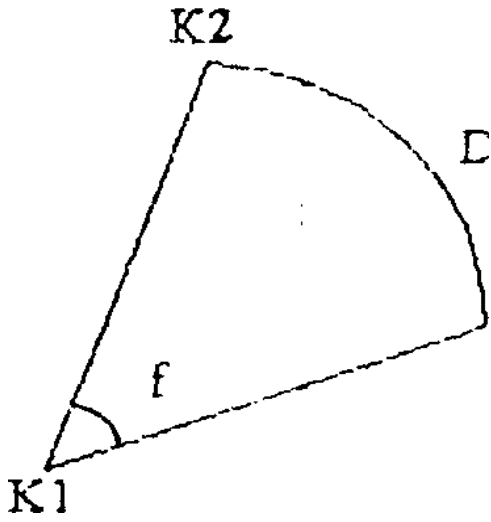


Рис.6.1.Нормальні перерізи і лінійні елементи на, пв-нормалі.
За теоремою сінусів запишем

$$\frac{\sin f}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin(360^\circ - A'_{21})}{\sin(90^\circ - \frac{\sigma}{2})}$$

Знайдемо $\sin E$ і після деяких перетворень одержимо.

$$f'' = \frac{1}{2} e^2 \sigma \cos^2 B_m \sin 2A_{12} \rho'' ; \quad (6.1)$$

По формулі (6.1) роаховується кут між взаємними нормальними перерізами, ребром якого є хорда АВ. Формула (6.1) приведена без виводу. Центральний кут $\text{АнаВ} = \sigma$ буде

$$\sigma = S[2] = S/N \quad (6.2)$$

Задаючись довжиною геодезичної лінії $S = 100$ км при $B_m = A_{12} = 45$ і $N = 6000$ км одержимо $\sigma = 1/6$. Тоді

$$f'' \approx 6''$$

Дня сторін триангуляції $f = 2'' : 3''$

Визначим лінійне розходження між взаємними нормальними перерізами і його максимальне значення.

Відмітим, що кут $\text{ВАна} = 90 - \sigma/2$. Візьмемо посередині прямого нормального перерізу точку К. Проведемо хорду АК. Кут КАна буде дорівнювати

$$90^\circ - \frac{\theta}{2}$$

Тоді, очевидно кут $\text{КАВ} = (\sigma - \theta)/2$

Через точку К проведемо площину перпендикулярну до двох взаємних нормальних перерізів, яка в перетині дасть точки К1 і К2.

$\text{Ана} = N_1$ є радіус кривизни першого вертикала.

Із трикутника КАна запишем

$$AK = 2N_1 \sin \frac{\theta}{2} \quad (6.3)$$

Таким чином довжина дуги хорди дорівнює двом радіусам помноженим на синус половинного центрального кута. Із трикутника КАК1 запишем:

$$KK1 = AK \sin \frac{\sigma - \theta}{2}$$

Приймаючи до уваги, що дуга $\text{КК2} = \text{КК1} f$; одержим

$$KK2 = d = 2N_1 \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma - \theta}{2} * \frac{1}{2} e^2 \sigma \cos^2 B_m \sin 2A_{12} \rho'' \quad (6.4)$$

$\sin Q/2$ розкладемо в ряд по малості кута θ і першим членом розкладу.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} \dots$$

Одержим

$$d = \frac{N_1}{4} \cdot e^2 \cdot \bar{\sigma} \cdot \cos^2 B_m \sin 2A_{12} \Theta(\bar{\sigma} - \Theta); \quad (6.5)$$

Якщо

$$\Theta = \frac{\bar{\sigma}}{2}$$

Одержим найбільше значення d , тоді по середині буде

$$\frac{\delta^2}{4}; \quad d_{\max} = \frac{N_1}{16} e^2 \bar{\sigma}^2 \cos^2 B_m \sin 2A_{12}; \quad (6.6)$$

Приведем таблицю максимальних розходжень d .

Таблиця 6.1.

S, км	200	100	50
d max ,(м)	0.05	0.006	0.0008
d max, (м)	5см	6см	0.8см

Таким чином, лінійне розходження є величина невелика.

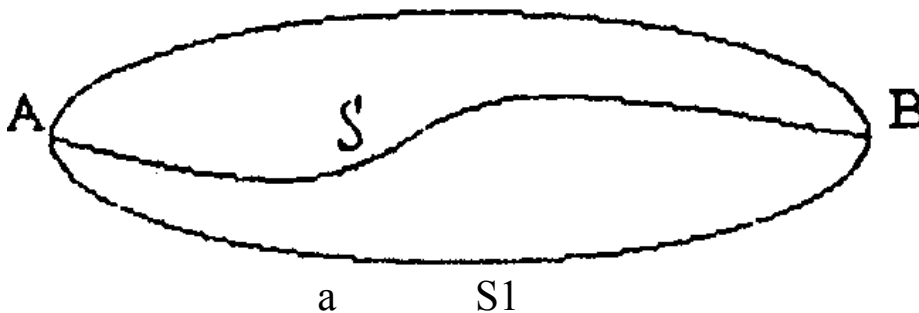


Рис.6.2.Геодезична лінія і нормальні перерізи.

Запишемо без виводу:

$$D_s = S - S_1 = \frac{a \cdot e^4}{360} \sin^2 A_{12} \cos^4 B_m \bar{\sigma}^5; \quad (6.7)$$

При $S = 600$ км, $D_s = 1:135000$.

6.2. Поправка в напрямок за перехід прямого нормального перерізу до геодезичної лінії.

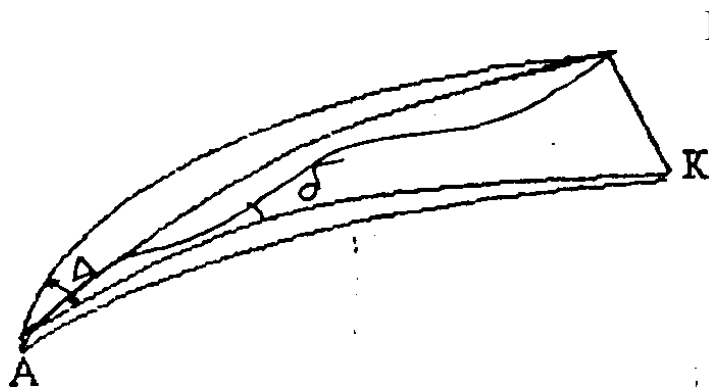


Рис.6.2. Поправка в напрям

Розглянемо ККА як довжину кола

$$\angle KAK_2 = \frac{KK^2}{AK} ; \quad (6.8)$$

Підставляючи (6.4) і (6.3) в (6.8), одержим,

$$\angle KAK_2 = \frac{N_1 \cdot e^2 \cdot \bar{b} \cos^2 B_m \sin 2A_{12} \cdot \Theta(\bar{b} - \Theta)}{4 \cdot 2 \cdot N_1 \sin \frac{\Theta}{2}} ;$$

Положим

$$\sin \frac{\Theta}{2} = \frac{\Theta}{2} ; \quad AK = 2N_1 \sin \frac{\Theta}{2} = 2N_1 \frac{\Theta}{2} = N_1 \Theta ;$$

Одержим

$$\angle KAK_2 = \frac{e^2 \bar{b} \cos^2 B_m \sin 2A_{12} (\bar{b} - \Theta)}{4} ; \quad (6.9)$$

$\angle KAK_2$ стає Δ'' при умові, коли $\Theta \ll \bar{b}$, де Δ —кут між взаємними нормальними перерізами в точці А

$$\delta'' = \frac{\Delta''}{3} = \frac{e^2 \cdot \bar{b}^2 \cos^2 B_m \sin 2A_{12}}{12} \cdot p'' ;$$

Враховуючи, що

$$\bar{b} = \frac{S}{N_m} ; \quad \frac{P}{N} = [2] ;$$

Одержим

$$\delta'' = \frac{e^2 \cdot [2]^2 \cdot S^2 \cos^2 B_m \sin 2A_{12}}{12} \cdot p'' ; (6.10)$$

По формулі (6.10) обчислюється поправка за перехід від нормального переріз до геодезичної лінії.

Якщо задатись довжиною геодезичної лінії S широтою B , то розрахуємо b'' на екваторі при $B=0, A_{12}=45$.

$S, (км)$	Δ''	B''
200	0,36''	0,12''
100	0.09''	0.02''
50	0,023''	0.006''

В триангуляції 1 класу кути вираховуються до $0.001''$ і поправку необхідно вводити. Ця поправка завжди вираховується від виміряного нормального перерізу своїм знаком. Вона віднімається зі своїм знаком.

Позначимо цю поправку b_1 як першу поправку, яка вводиться в виміряні напрямки триангуляції.

6.3. Поправка в напрямках за висоту точки, яка спостерігається.

Візьмем на фізичній поверхні Землі дві точки A і B і спроектуємо їх на поверхню референц-еліпсоїда. Одержимо точки a і b в проекції по нормалі, Прилад розташований в точці A . Зневільювали його і навели на точку B .

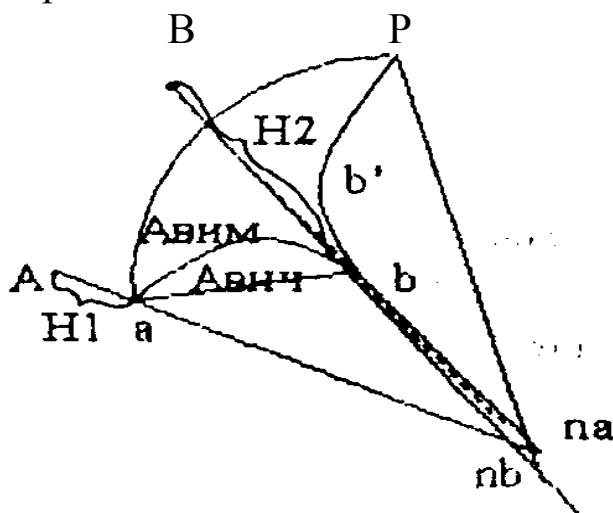


Рис.6.3.Поправка за висоту точки.

$$\angle b'ab = A_{Bum} - A_{Bur} = \delta_2 ; (6.11)$$

якби не було висоти H_2 , то

$$A_{Bum} = A_{Bur} \text{ , при } H_2 = 0$$

Поправка в напрямок за висоту точки, яка спостерігається, розраховується по формулі:

$$\delta_2 = H_2 \cdot [1]_m \frac{e^2}{2} \sin 2A_{12} \cos^2 B_2 ; \quad (6.12)$$

$$\partial e_{-} [1] = \frac{p''}{M} ;$$

із формули (6.12) слідує, що поправка δ_2 не залежить від довжини геодезичної лінії. Якщо $B_2 = 45$; $A_{12} = 45$; при $H_2 = 1000$ м отримаємо $\delta_2 \leq 0,05''$ При $H_2 = 200$ м $\delta \leq 0.008''$

Поправка δ_2 додається зі своїм знаком.

6.4. Поправка в напрямок за відхил прямовисної лінії.

При вимірюванні кутів прямовисна лінія не співпадає з нормаллю. Перехід від прямовисної лінії до нормалі виконують по формулі:

$$\delta_3 = -(\zeta \cdot \sin A_{12} - \eta_1 \cdot \cos A_{12}) \operatorname{ctg} Z_{12} ; \quad (6.13)$$

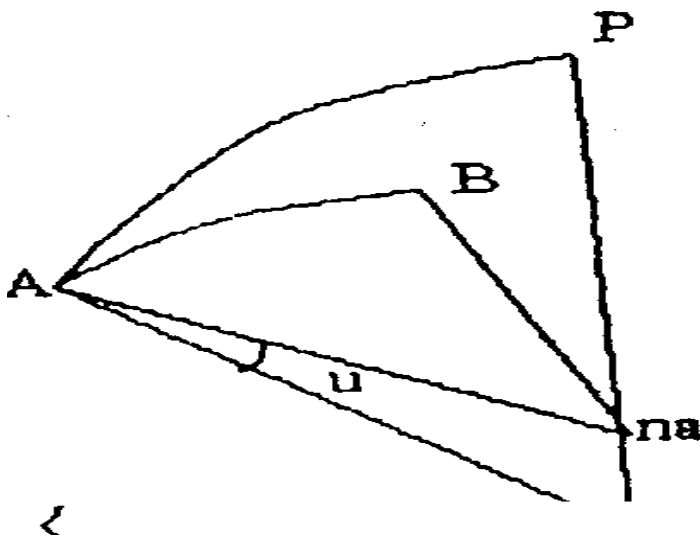


Рис. 6.4. Нормаль і прямовисна лінія.

де: ζ —складові повного відхилення прямовисної лінії u

Z_{12} —зенітна віддаль з точки 1 на точку 2

δ_3 мала на рівнинах, а в горах досягає $60''$. Формула (6.13) дається без виводу.

Повна поправка:

$$\delta \cdot N = -\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 ; \quad (6.14)$$

Дана формула забезпечує точність до $0.001''$ і поправка OM вводиться в вимірний напрямок, таким чином, нами розглянуті кутові поправки в напрямок.

6.5. Поправка в геодезичну лінію за перехід на поверхню референц-еліпсоїда.

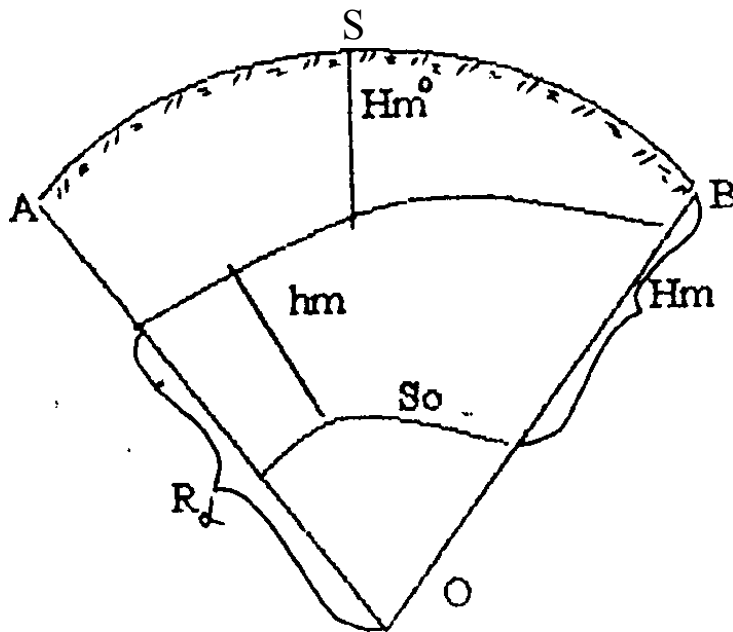


Рис.6.5. Лінійна поправка.

Нехай S - вимірний базис між двома точками A і B .

$$S = \sum l_1 \cos \alpha_1 ; \quad (6.15)$$

Де α -кутн нахилу.

Нормалі не перетинаються. Вони перетинаються, якщо лежать в одному меридіані.

$$S_0 = S \left(1 - \frac{H_m}{R_a} + \frac{H_m^2}{R_a^2} \right); \quad (6.16)$$

Де: H_m — геодезична висота, якої не маємо.

H_m — визначаємо після обробки триангуляції із астрономо-гравіметричного нівелювання; R_a — нормалі.

Розділ 6

Лекція 7. Обчислення геодезичних широт, довгот та азимутів

7.1. Деякі загальні відомості.

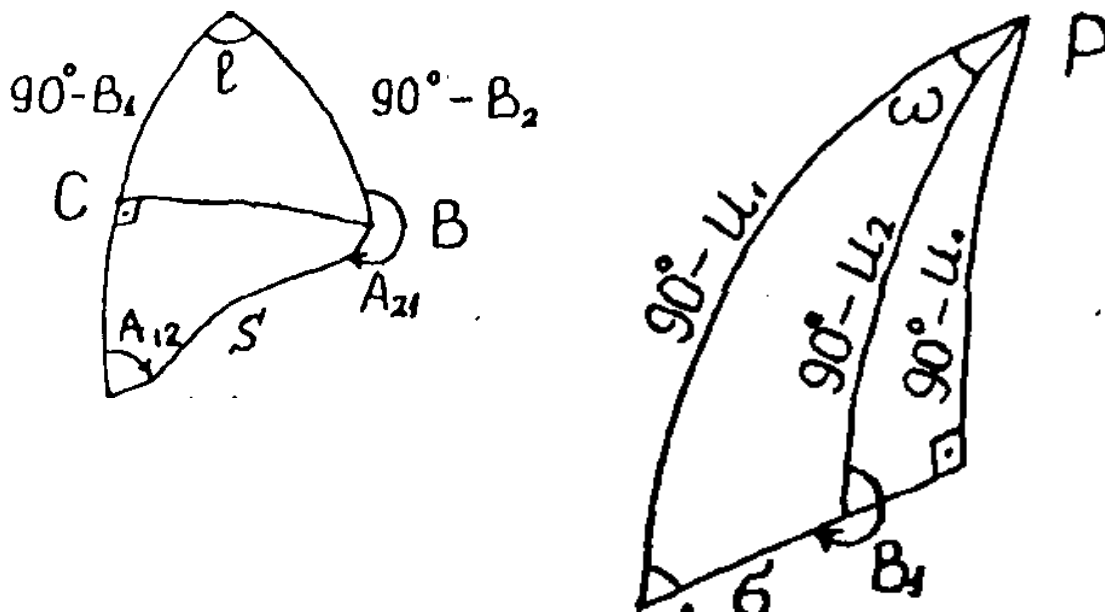


Рис 7.1. сфероїдальний трикутник і відповідний йому сферичний $A_1P'B_1$.

Кінцевою ціллю основних геодезичних робіт є визначення координат геодезичних пунктів. Положення двох пунктів може бути задано:

а) геодезичними координатами одного пункту B_1, L_1 і віддаллю S та азимутом A_{12} на другий пункт.

Необхідно визначити широту B_2 , довготу L_2 і обернений азимут A_{21} . Така задача називається прямою головною геодезичною задачею.

Оберненою головною геодезичною задачею називається визначення віддалі S і азимутів A_{12} та A_{21} по відомим координатам двох пунктів B_1, L_1 і B_2, L_2 .

Задачі можуть розв'язуватися на довільні віддалі. Умовно їх поділяють на чотири групи:

- 1) малі віддалі 30-40 км.
- 2) середні віддалі - до 600 км

3) великі віддалі - до 5000 км.

4) дуже великі - до 19000 км.

7.2. Розв'язання головних геодезичних задач безпосереднім шляхом
Безпосередній шлях розв'язання головної геодезичної задачі полягає в розв'язанні сфероїдального трикутника APB (рис 7.1.).

Відомі дві сторони: $AP = 90^\circ - B_1$; $AB = S$ і кут між ними A_{12} . З розв'язання трикутника визначають три інші елементи: $BP = 90^\circ - B_2$; $(360 - A_{21})$, тобто A_{21} ; різницю довгот 1 пунктів A і B , по якій знаходять довготу точки B , тобто $L_2 = L_1 + 1$

При розв'язанні оберненої геодезичної задачі відомі три елементи B_1, B_2 і L розв'язуючи трикутник, знаходять кути $PAB = A_{12}$, $PBA = 360 - A_{21}$, і сторону $AB = S$. Безпосереднім шляхом проводять розв'язання прямої і оберненої головної геодезичної задачі на великі відстані. Є декілька способів розв'язання. Широке примінення знайшов спосіб Бесселя. В даному способі користуються приведеною широтою U . Від елементів сфероїдального трикутника переходять до елементів сферичного трикутника. Перехід на кулю запропонував Бессель розв'язуючи сферичний трикутник знову переходять до еліпсоїда.

Перехід до приведеної широти виконують по формулі

$$ttgU = \sqrt{1 - e^2} tgB \quad (7.1)$$

При Бесселевому зображенні еліпсоїда на кулі мають місце такі співвідношення і відповідності між сфероїдальним трикутником APB і сферичним $A_1P'B_1$.

1. Сторони AP і BP є доповненням до 90° точок A і B еліпсоїда.

2. Геодезична лінія S на еліпсоїді між точками A і B відповідає на кулі дузі великого кола a між точками A_1 і B_1 , на якій в кожній її точці азимут дорівнюють азимутам геодезичної лінії у відповідних точках еліпсоїда.

Внаслідок цього $\angle PAB = \angle P'A_1B_1$ і $\angle ABP = \angle A_1B_1P'$, $\angle APB \neq \angle A_1P'B_1$

Порядок розв'язування задач.

Маючи U_1 знаходять U_2 і розраховують B_2 . Вся трудність заключається в знаходженні різниці довгот і різниці азимутів. Необхідно знайти співвідношення між S і σ, l і w сферичною різницею довгот.

Порядок одержання формул.

1. Встановлення зв'язку між S і σ, l і w - вибір диференціальних рівнянь.

2. Інтегрування цих диференціальних рівнянь.

3. Розв'язування трикутника на кулі відповідно до умов прямої і оберненої задачі.

4. Остаточне визначення потрібних величин.

7.3. Посередній шлях розв'язання головної геодезичної задачі. Полягає у виводі різниці широт, довгот та азимутів даного пункту і визначаємого

Загальні риси розв'язку.

розв'язуючи систему диференціальних рівнянь геодезичної лінії

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB}{dS} &= \frac{V^3}{C} \cos A \\ \frac{dl}{dS} &= \frac{V}{C} \sec B \sin A \\ \frac{dA}{dS} &= \frac{V}{C} \operatorname{tg} B \sin A = \frac{dL}{dS} \sin B \end{aligned} \right\} , \quad (7.2)$$

після інтегрування одержимо

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_1 + \int_0^s \frac{V^3}{C} \cos A dS \\ L_2 &= L_1 + \int_0^s \frac{V}{C} \sec B \sin A dS \\ A_{21} &= A_{12} \pm 180^\circ + \int_0^s \frac{V}{C} \operatorname{tg} B \sin A dS \end{aligned} \right\} , \quad (7.3)$$

Формули (7.3) дають в загальному вигляді розв'язання прямої геодезичної задачі.

При розв'язку задач необхідним є використання рядів з перенесенням елементів сфероїдального трикутника на сферу, розв'язком задачі на ній і зворотним переходом на поверхню еліпсоїда. Так проводять розв'язок головної задачі на великі віддалі.

При розв'язку головної геодезичної задачі на малі віддалі слід застосовувати посередній шлях розв'язку задачі і використовувати ряди за зростаючими степенями S .

Широко використовуються наступні методи:

- 1) по формулам із середніми аргументами;
- 2) по способу допоміжної точки (спосіб Шрейбера)
- 3) при використанні допоміжної сфери (спосіб Бесселя);
- 4) в просторовій системі координат (спосіб Молоденського);
- 5) методом чисельного інтегрування (Рунге-Кутта); та інші.

7.4. Порядок розв'язання прямої геодезичної задачі по способу допоміжної точки C .

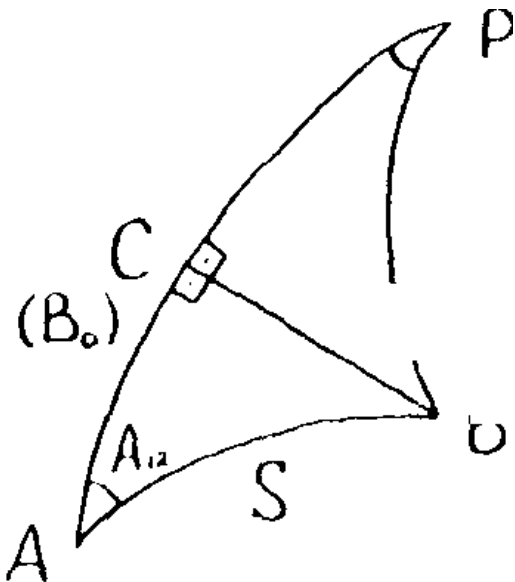


Рис. 7.2. Сфероїдальний трикутник APB.

Розглянемо трикутник APB на поверхні реперенц-еліпсоїда. З точки B проведемо пряму лінію на меридіан таким чином, щоб був утворений прямий кут.

Порядок дій.

1) Розв'язують сферичний допоміжний трикутник ACB по теоремі Лежандра.

2) Одержують різниці широт між пунктом C і пунктом A.

3) Одержують різниці довгот між точкою B і C.

4) Розраховують широту точки B

5) Знаходять обернений азимут A_{21}

Сторони допоміжного трикутника ACB знаходять по формулам (дані виводу)

$$AC = U \left[1 + \frac{1}{3} \frac{V^2 V_1^4}{a^2 (1 - e^2)} \right] \quad (7.4)$$

$$BC = V \left[1 - \frac{1}{6} \frac{U^2 W_1^4}{a^2 (1 - e^2)} \right] \quad (7.5)$$

$$U = S \cos A_{12}; V = S \cdot \sin A_{12} \quad (7.6)$$

Різниця широт між пунктами C і A

$$b'' = U \left[1 + \frac{1}{3} \frac{V^2 W_1^4}{a^2 (1 - e^2)} \right] \cdot \left[1 + \frac{3}{4} \frac{U W_1 e^2}{a (1 - e^2)} \sin 2B_1 \right] \cdot \frac{1}{M_1} p'' \quad (7.7)$$

$$B_0 = B_1 + b \quad (7.8)$$

Різниця довгот 1 між точкою В і С розраховується по формулі

$$l = \lambda \left(1 - \frac{r^2}{3} \right), L_2 = L_1 + l'' \quad (7.9)$$

$$\text{де } \lambda = \gamma / \cos B_0; \quad \gamma = v \cdot V_0 / V_1^2; \quad V_0 = \sqrt{1 + e'^2 \cos B_0};$$

$$v = v_0 \left(1 - \frac{u_0^2}{6} \right); \quad U_0 = \sigma \cos A_1; \quad V_0 = \sigma \sin A_1; \quad \sigma = \frac{S}{c} V_1^2;$$

$$V_1 = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_1}; \quad \tau = \lambda \sin B_0$$

Широта точки В₂

$$B_2 = B_0 - d \quad (7.10)$$

$$d = \frac{t\gamma}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{12} \right) V_0^2 \rho''; \quad t = \tau \left(1 + \frac{\lambda^2 + \tau^2}{6} \right);$$

Обернений азимут А2 є

$$A_2 = A_1 \pm 180^\circ (t - \varepsilon) \rho''; \quad \varepsilon = \frac{UV}{2};$$

7.5. Необхідна точність обчислень геодезичних координат. Прийmemo до уваги середню квадратичну похибку обчислення координат наступної сторони

$$m = \frac{S\mu}{\rho'' \sin 60^\circ} \approx 12 \text{ см} \quad (7.11)$$

де S - довжина сторони; μ - середня квадратична похибка вимірювання кута. Для першого класу триангуляції $\mu = 0,7''$. Взявши $\rho'' = 206264,8''$; при S = 20 - 25 або 30 км, одержим $m = 12$ см.

Похибки в обчисленнях повинні бути в 10 раз менші ніж польові виміри. Значить, обчислення необхідно виконувати з точністю $m = \pm 1$ см. Похибка в широті на 1 см дає $\Delta B'' \approx 0,0003''$, а в довготу $\Delta L \approx 0,0003'' \text{secB}$.

Таким чином, широти і довготи необхідно обчислювати з точністю доб десятитисячної долі секунди.

Дослідим, яку кількість знаків необхідно враховувати при обчисленнях. Візьмем S = 30 км. Для $(B_2 - B_1)'' \approx 1000''$ похибка ΔN буде

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{0,0001}{1000} = \frac{10^{-4}}{10^3} = 10^{-7}.$$

Якщо продиференціювати, одержимо

$$\lg N = \mu \frac{dN}{N} = 0,4 \cdot 10^{-7} = 4 \cdot 10^{-8}, \quad (7.12)$$

при забезпеченні точності $\Delta N = 0,0001''$.

Таким чином, необхідно користуватися восьми значними таблицями логарифмів.

У виразі (7.12) μ - модуль переходу від натуральних до десятичних логарифмів.

Лекція №8. Розв'язок головної задачі за формулами із середніми аргументами.

8.1 Пряма геодезична задача

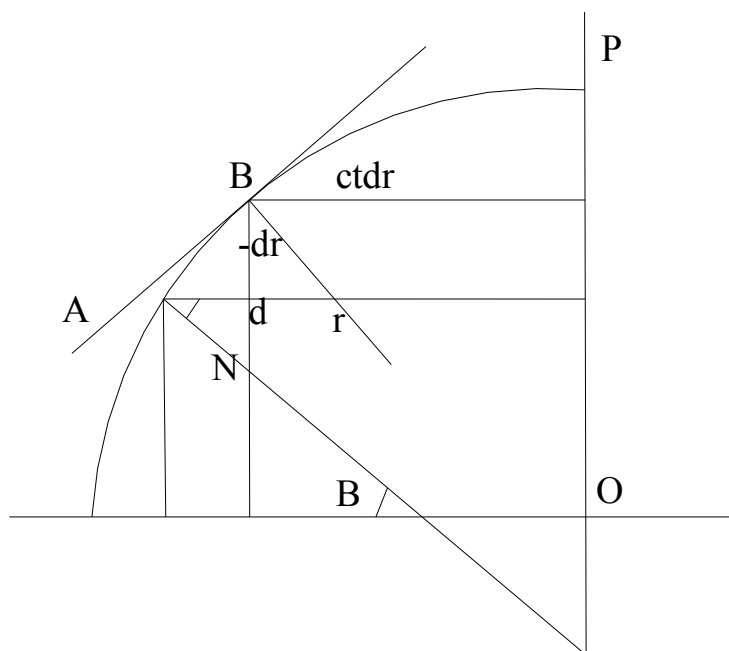


Рис. 8.1. Геодезична лінія $AB=S$

Відомі параметри; B_1, L_1, A_{12}, S

Шукані величини будуть функції геодезичної лінії

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= f_1(S) \\ L_2 &= f_2(S) \\ A_{21} &= f_3(S) \end{aligned} \right\}; \quad (8.1)$$

Формули (3.1) віднесемо до початкової точки.

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= f_1(0) \\ L_2 &= f_2(0) \\ A_{21} &= f_3(0) \end{aligned} \right\}; \quad (8.2)$$

До формул (1) застосовуємо ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{6} f'''(0)x^3 + \dots$$

Для нашого випадку, одержимо

$$\begin{aligned} B_2 &= f_1[0] + f_1'(0) \cdot S + \frac{1}{2} f_1''(0) \cdot S^2 + \frac{1}{6} f_1'''(0) \cdot S^3 + \dots \\ L_2 &= f_2(0) + f_2'(0) \cdot S + \frac{1}{2} f_2''(0) \cdot S^2 + \frac{1}{6} f_2'''(0) \cdot S^3 + \dots \\ A_{21} &= f_3(0) + f_3'(0) \cdot S + \frac{1}{2} f_3''(0) \cdot S^2 + \frac{1}{6} f_3'''(0) \cdot S^3 + \dots \end{aligned} \quad (8.3)$$

Враховуємо в формулі (8.3) вираз (8.2)

$$\left. \begin{aligned} B_2 - B_1 &= \left(\frac{dB}{dS} \right)_1 \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d^2 B}{dS^2} \right)_1 \cdot S^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{d^3 B}{dS^3} \right)_1 \cdot S^3 + \dots \\ L_2 - L_1 &= \left(\frac{dL}{dS} \right)_1 \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d^2 L}{dS^2} \right)_1 \cdot S^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{d^3 L}{dS^3} \right)_1 \cdot S^3 + \dots \\ A_{21} - A_{12} + 180^\circ &= \left(\frac{dA}{dS} \right)_1 \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d^2 A}{dS^2} \right)_1 \cdot S^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{d^3 A}{dS^3} \right)_1 \cdot S^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Індекс 1 означає, що похідні у формул (8.4) беруться по аргументу першої точки.

Візьмемо точку С строго посередині геодезичної лінії. Прийmemo її за початкову. Візьмемо до уваги першу формулу (8.4):

$$B_1 - B_0 = - \left(\frac{dB}{dS} \right)_0 \cdot \frac{S}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d^2 B}{dS^2} \right)_0 \cdot \frac{S^2}{4} - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{d^3 B}{dS^3} \right)_0 \cdot \frac{S^3}{8}; \quad (8.5)$$

$$B_2 - B_0 = \left(\frac{dB}{dS} \right)_0 \cdot \frac{S}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d^2 B}{dS^2} \right)_0 \cdot \frac{S^2}{4} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{d^3 B}{dS^3} \right)_0 \cdot \frac{S^3}{8}; \quad (8.6)$$

Віднімаємо друге рівняння від першого:

$$B_2 - B_1 = \left(\frac{dB}{dS} \right)_0 \cdot S + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{d^3 B}{dS^3} \right)_0 \cdot \frac{S^3}{8} + \dots; \quad (8.7)$$

$$L_2 - L_1 = \left(\frac{dL}{dS} \right)_0 \cdot S + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{d^3 L}{dS^3} \right)_0 \cdot \frac{S^3}{8} + \dots; \quad (8.8)$$

$$A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ = \left(\frac{dA}{dS} \right)_0 \cdot S + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{d^3 A}{dS^3} \right)_0 \cdot \frac{S^3}{8} + \dots; \quad (8.9)$$

Похідні в цих формулах відносять до точки С. Порівнюючи (8.7) (8.8) (8.9) (8.4). вигоди такого прийому очевидні, тому що нема парних похідних, коефіцієнти при непарних зменшились.

Візьмемо до уваги формули (8.5) і (8.6) і, крім того, замітимо, що

$$B_0 \neq B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2); \quad A_0 \neq A_m; \quad L_0 \neq L_m$$

Додамо рівняння (3.5) і (8.6) і розділимо на 2.ї

$$B_m - B_0 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{d^2 B}{dS^2} \right)_0 S^2 + \dots; \quad (8.10)$$

$$L_m - L_0 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{d^2 A}{dS^2} \right)_0 S + \dots; \quad (8.10')$$

По аналогії

$$A_m - A_0 \pm 180^\circ = A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ = \frac{1}{8} \left(\frac{d^2 A}{dS^2} \right)_0 S^2 + \dots; \quad (8.10'')$$

формули (8.7)(8.9) з врах^тзанням (8.10) взагальному випадку розв'язують задачі. Хід виводу формули зводиться до знаходження похідних і підстановки їх в (8.7), (8.8), (8,9) з врахуванням (8.10), (8.10'), (8.10'')

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB}{dS} &= \frac{V^3}{C} \cos A; \\ \frac{dL}{dS} &= \frac{dl}{dS} = \frac{V}{C} \sin A \cdot \sec B; \\ \frac{dA}{dS} &= \frac{dt}{dS} = \frac{V}{C} \sin A \cdot \operatorname{tg} B; \end{aligned} \right\}; (8.11)$$

$$\frac{d^2 B}{dS^2} = \frac{3V^2}{C} \cdot \frac{dV}{dS} \cos A - \frac{V^3}{C} \sin A \cdot \frac{dA}{dS}; (8.12)$$

$$\frac{dV}{dS} = \frac{dV}{dB} \cdot \frac{dB}{dS}; V^2 = 1 + e^{12} \cos^2 B = 1 + \eta^2; t = \operatorname{tg} B$$

$$2VdV = 2e'^2 \cos^2 B \sin B dB; \frac{dV}{dB} = -\frac{e'^2 \cos B \sin B}{V} = -\frac{\eta^2}{V} - t;$$

$$\frac{d^2 B}{dS^2} = \frac{3V^2}{C} \left(-\frac{\eta^2}{V} \cdot t \right) \cdot \cos A \cdot \frac{V^3}{C} \cos A - \frac{V^3}{C} \sin A \left(\frac{V}{C} \sin A \cdot t \right);$$

$$\frac{d^2 B}{dS^2} = -\frac{V^4}{C^2} t \cdot (\sin^2 A + 3\eta^2 \cos^2 A); (8.12')$$

$$\frac{d^2 B}{dS^2} = \frac{V}{C} \cdot \frac{dV}{dS} \sin A \sec B - \frac{V}{C} t \sec B \sin A \frac{dB}{dS} + \frac{V}{C} \sec B \cos A \frac{dA}{dS}; (8.13)$$

Тепер всі величини відомі. Підставим згрунтуємо

$$\frac{dV}{dS} = \frac{dV}{dB} \cdot \frac{dB}{dS} = -\frac{\eta^2}{V} t \cdot \frac{V^3}{C} \cos A; dA = dl \sin B; t = l \sin B,$$

$$\frac{dA}{dS} = \frac{dl}{dS} \sin B;$$

$$\frac{d^2 l}{dS^2} = \frac{2V^2 t}{C^2} \sec B \sin A \cos A; (8.13')$$

$$\frac{d^2 A}{dS^2} = \frac{d^2 l}{dS^2} \sin B + \frac{dl}{dS} \cos B \frac{dB}{dS}; (8.14)$$

$$\frac{d^2 A}{dS^2} = \frac{V^2}{C^2} \sin A \cos A (1 + 2t^2 + \eta^2); (8.14')$$

Точка D має широту B_m , але не відповідає A_m . B_m — B_c малі і точка D бпшьяка до точки C.

Застосуємо ряд Тейлора для функції двох змінних:

$$f(x, y) = f[x+h, y+k] = f(x, y) + \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} k \right\} + \dots; (8.15) \text{ I в}$$

нашому випадку

$$f(B_0, A_0) = f[B_m + (B_0 - B_m)A_m + (A_0 - A_m)]f(B_m, A_m) + \frac{\partial f(B_m, L_m)}{\partial B} \times \text{Дану} \\ \times (B_0 - B_m) + \frac{\partial f(B_m, A_m)}{\partial A} (A_0 - A_m); (8.16)$$

формулу підставимо у формулу (8.10):

$$\left(\frac{dB}{dS}\right)_0 = \left(\frac{dB}{dS}\right)_m - \frac{S^2}{8} \left(\frac{d^2 B}{dS^2}\right)_m \frac{\partial \left(\frac{dB}{dS}\right)_m}{\partial B} - \frac{S^2}{8} \left(\frac{d^2 A}{dS^2}\right)_m \frac{\partial \left(\frac{dB}{dS}\right)_m}{\partial A}; (8.17) \text{Підставл}$$

яючи цей вираз у (8.7), одержимо:

$$B_2 - B_1 = \left(\frac{dS}{dS}\right)_m S - \frac{S^3}{8} \left(\frac{d^2 B}{dS^2}\right)_m \frac{\partial \left(\frac{dB}{dS}\right)_m}{\partial B} - \frac{S^3}{8} \left(\frac{d^2 A}{dS^2}\right)_m \frac{\partial \left(\frac{dB}{dS}\right)_m}{\partial B} + \frac{S^3}{24} \left(\frac{d^3 B}{dS^3}\right)_m; (8.18) \text{В}$$

даному випадку:

$$\left(\frac{d^3 B}{dS^3}\right)_0 = \left(\frac{d^3 B}{dS^3}\right)_m; \\ \frac{\partial \left(\frac{dB}{dS}\right)}{\partial B} = -\frac{3V_m \eta^2 t_m \cos A_m}{C}; (8.19)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{dB}{dS}\right)}{\partial A} = \frac{V_m^3}{C} \sin A_m; (8.20)$$

Підставляємо вираз (8.19) і (8.20); у (8.18).

$$(B_2 - B_1) = \frac{V_m^4}{C} S \cos^4 A_m \left\{ 1 + \frac{1V_m^2}{24C^2} S^2 [\sin^2 A_m (2 + 3\eta_m^2 + 2\eta_m^2) + 3\eta_m^2 \cos^2 A_m (r_n - 1 - \eta_m^2 - 4\eta_m^2)] \right\}$$

Приймаючи до уваги, що:

$$\frac{\rho''}{M} = [1]; \quad \frac{\rho'''}{N} = [2]; \\ b'' = (B_2 - B_1)'' = [1]_m S \cos A_m \{ \dots \}; (8.21)$$

По аналогії

$$l'' = (L_2 - L_1) = [2]_m S \sin A_m \sec B_m \left[1 + \frac{1}{24} - \dots \right]; (8.22)$$

$$t'' = (A_{21} - A_{12}) \pm 180^\circ = [2]_m S \sin A_m \operatorname{tg} B_m \left[1 + \frac{1}{24} - \dots \right]; (8.23)$$

Поправочні члени в дужках заміняються:

$$b'' = [1]_m S \cos A_m \left[1 + \frac{t \cos^2 B_m}{12\rho''} + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{8\rho''} \right]; (8.24)$$

або:

$$b'' = [1]_m S \cos A_m \left[1 + \frac{l''^2}{12\rho''^2} + \frac{t''^2}{24\rho''^2} \right]; (8.24')$$

де:

$$l^2 = (1 - \sin^2 B_m); t_m = l \sin B_m;$$

$$l'' = [2]_m S \sin A_m \sec B_m \left[1 - \frac{b''^2}{24\rho''^2} + \frac{t''^2}{24\rho''^2} \right]; (2.25)$$

$$t'' = [2]_m S \sin A_m \operatorname{tg} B_m \left[1 + \frac{b''^2}{12\rho''^2} + \frac{l''^2 \cos^2 B_m}{12\rho''^2} + \frac{l''^2 \sin^2 B_m}{24\rho''^2} \right]; (8.26)$$

Для обчислення координат при $S < 45 \text{ км}$:

$$(B_2 - B_1)'' = e'' = \rho'' \cdot S \cos A_m \cdot \frac{V_m^3}{C} \left\{ 1 + \frac{l''^2}{12\rho''^2} + \frac{t''^2}{24\rho''^2} \right\}; (8.27)$$

Де:

$$V_m = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_m};$$

$$l = L_2 - L_1 = \frac{V_m}{C} S \sin A_m \sec B_m; (8.28)$$

$$t = (A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ) = \frac{V_m}{C} S \sin A_m \operatorname{tg} B; (8.29)$$

$$(L_2 - L_1) = l'' = \rho'' \cdot \frac{V_m}{C} S \sin A_m \sec B_m \left(1 - \frac{b''^2}{24\rho''^2} + \frac{t''^2}{24\rho''^2} \right); (8.30)$$

$$(A_{21} - A_{12} \pm 180^\circ) = t'' = \rho'' \cdot \frac{V_m}{C} S \sin A_m \operatorname{tg} B_m \left(1 + \frac{b''^2}{12\rho''^2} - \frac{t''^2}{24\rho''^2} + \frac{l''^2}{12\rho''^2} \right); (8.31)$$

Тоді:

$$B_2 = B_1 + b; L_2 = L_1 + l; A_{21} = A_{12} \pm 180^\circ + t; (8.32)$$

Але b , l і t є функціями середніх значень B_m і A_m , які нам відомі. Тому задача вирішується методом послідовних наближень

$$\left. \begin{aligned} B'_2 &= B' + b' = B_1 + S \cos A_{12} \frac{V_1^3}{C}; \\ l' &= \frac{V_1}{C} S \sin A_{12} \sec B_1; \\ t' &= \frac{V_1}{C} S \sin A_{12} \operatorname{tg} B_1; \\ B'_m &= \frac{B_1 + B_2}{2}; L'_m = \frac{L_1 + L_2}{2}; A'_m = \frac{A_{12} + (A_{21} \pm 180^\circ)}{2}; \end{aligned} \right\}; (8.33)$$

Використовуючи значення B_m, L_m, A_m за формулами (8.27)-(8.31), знаходимо b, l, t в другому наближенні і так далі до необхідної точності.

8.2. Обернена геодезична задача.

За заданими координатами B_1, L_1 та B_2 , знаходимо:

$$b = \frac{B_2 - B_1}{\rho''}; \quad l = \frac{L_2 - L_1}{\rho''}; \quad B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2); (8.34)$$

$$V_m = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_m};$$

$$\text{Враховуючи, що: } M_m = \frac{C}{V_m^3}; \quad N_m = \frac{C}{V_m};$$

Формули, отримані для розв'язку прямої геодезичної задачі (8.27-8.33),

запишемо

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{S \cos A_m}{M_m} \cdot \left(1 + \frac{l^2}{12} + \frac{t^2}{24} \right); \\ l &= \frac{S \sin A_m}{M_m} \sec B_m \cdot \left(1 - \frac{b^2}{24} + \frac{t^2}{24} \right); \\ t &= l \sin B_m \cdot \left(1 + \frac{b}{8} + \frac{l^2}{12} - \frac{t^2}{12} \right); \\ t &= \frac{(A_{2-1} - A_{1-2} \pm 180^\circ)}{\rho}; \end{aligned} \right\}; (8.35)$$

Формули (8.34) і (8.35) є вихідними для розв'язку оберненої геодезичної задачі. Так, із (8.35) знаходимо:

$$\left. \begin{aligned} S \cos A_m &= b M_m \left(1 - \frac{2t^2 (l \sin B_m)^2}{24} \right); \\ S \sin A_m &= l N_m \cos B_m \left(1 + \frac{b^2 - (l \sin B_m)^2}{24} \right); \\ S \sin A_m &= P; S \cos A_m = Q; \end{aligned} \right\}; (8.36) \text{Позначивши}$$

праві частини (8.36) відповідно через P і Q, отримаємо

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} A_m &= \frac{P}{Q}; \\ S^2 \cos^2 A_m + S^2 \sin^2 A_m &= P^2 + Q^2; \\ S^2 &= P^2 + Q^2; \end{aligned} \right\}; (8.37)$$

$$S \sqrt{P^2 + Q^2};$$

Діючи аналогічно, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} 2A_m (A_{1-2} +_{2-1} \pm 180^\circ); \\ t = (A_{2-1} - A_{1-2} \pm 180^\circ); \end{aligned} \right\}; (8.38)$$

Звідки:

$$\left. \begin{aligned} A_{12} &= A_m - \frac{1}{2}t; \\ A_{21} &= A_m + \frac{1}{2}t \pm 180^\circ; \end{aligned} \right\}; (8.39)$$

де:

$$t'' = l \sin B_m \left(1 + \frac{3b^2 + 2l^2 - 2(l \sin B_m)^2}{24} \right) \cdot \rho''$$

Всі наведені формули, що розв'язують головні геодезичні задачі, призначені для обчислення в триангуляції 1 класу

Розділ №7.

Лекція №9. Диференціальні формули першого і другого роду

9.1 Загальні поняття.

Па практиці виникає необхідність в переурівнюванні ряду пунктів.

Формули, які виражають поправки в геодезичні координати пунктів азимути напрямків викликані зміною вихідних даних називаються **диференціальними формулами першого роду.**

Триангуляція вирівняна на якомусь еліпсоїді. В процесі проведення геодезичних робіт параметри еліпсоїда уточнились і щоб заново вичисляти координати, ПУНКТИВ складати таблиці необхідні формули, які виражають поправки в геодезичні координати і азимути за зміну параметрів еліпсоїда. Такі формули називаються **диференціальними формулами другого роду.**

9.2 Спрощені диференціальні формули першого роду.

Приведемо

спрощені формули для сторін не більше 40-50 км. На поверхні еліпсоїда координати початкового пункту одержали зміну.

$$\left. \begin{aligned} B'_2 &= B_2 + dB_2; \\ L'_2 &= L_2 + dL_2; \\ A'_{2,1} &= A_{2,1} + dA_{2,1}; \end{aligned} \right\} ;(9.1)$$

Тоді:

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_1 + 0 = B_1 + [1]_m S \cos A_m + III; \\ L_2 &= L_1 + 1 = L_2 + [2]_m S \sin A_m \cdot \sec B_m + III; \\ A_{2,1} &= A_{1,2} \pm 180^\circ + \tau = A_{1,2} \pm 180^\circ + [2]_m S \sin A_m \cdot \operatorname{tg} B_m + III \end{aligned} \right\} (9.2)$$

Де: Ш—поправка.

Візьмемо повний диференціал і розложимо в ряди:

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= dB_1 + \frac{\partial b}{\partial B_m} dB_m + \frac{\partial b}{\partial A_m} dA_m + \frac{\partial b}{\partial S} dS; \\ dL_2 &= dL_1 + \frac{\partial l}{\partial B_m} dB_m + \frac{\partial l}{\partial A_m} dA_m + \frac{\partial l}{\partial S} dS; \\ dA_{2,1} &= dA_{1,2} \pm 180^\circ + \frac{\partial t}{\partial B_m} dB_m + \frac{\partial t}{\partial A_m} dA_m + \frac{\partial t}{\partial S} dS; \end{aligned} \right\} (9.3)$$

По цих частинах вичислюємо поправки. Щоб отримати частинні похідні, потрібно продиференціювати (9.2) Диференціали dB_m , dA_m замінимо через dB_1 , dB_2 . Продиференціюємо по B_m вираз для $b_n [1]_m S \cos A_m$, одержали:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial B_m} &= S \cos A_m \frac{\partial [1]_m}{\partial B_m} = S \cos A_m \frac{\partial}{\partial B_m} \left[\frac{\rho'}{M_m} \right] = S \cos A_m \frac{\partial}{\partial B_m} \times \\ &\times \left\{ \frac{\rho'(1 - e^2 \sin^2 B_m)}{a(1 - e^2)} \right\}^{1/2} = S \cos A_m \left[-\frac{3}{2} \cdot \frac{\rho'' e^2 \sin 2B_m (1 - e^2 \sin^2 B_m)^{1/2}}{a(1 - e^2)} \right]; \end{aligned}$$

Або:

$$\frac{\partial b}{\partial B_m} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\rho''}{M_m} \cdot \frac{e^2 \sin 2B_m S \cos A_m}{(1 - e^2 \sin^2 B_m)};$$

Тому що при диференціюванні в фігурних дужках одержали

$$-\frac{3}{2} \left(1 - e^2 B_m\right)^{1/2} 2e^2 \sin B \cos B;$$

і враховуючи, що:

$$2e^2 \sin B_m \cos B_2 = e^2 \sin 2B_m$$

Отримали вище приведені рівняння.

Прийmemo до уваги, що:

$$S \cos A_m = u; \quad \frac{u\rho''}{M} = b'$$

отримаємо:

$$\frac{\partial b}{\partial B_m} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{b'' e^2 \sin 2B_m}{1 - e^2 \sin^2 B_m}; \quad (a)$$

значення

$$\frac{\partial b}{\partial B_m} eB_1;$$

є величиною четвертого порядку малості і ним нехтуємо В цих формулах МОЖЕМ не робити різниці між [1] і [2]

$$\frac{\partial b}{\partial A_m} = -[1]_m S \sin A_m = -[2]_m S \sin A_m \frac{\cos B_m}{\cos B_m} = -l'' \cos B_m; \quad (b)$$

$$\frac{\rho}{N} = [1] \frac{\rho}{N} = [2]$$

Диференціюючи:

$$b = [1]_m S \cos A_m;$$

Одержимо:

$$\frac{\partial b}{\partial S} = [1]_m \cos A_m \frac{S}{S} = \frac{b}{S}; \quad (в)$$

З врахуванням вищеприведеного

$$dB_2 = dB_1 - \frac{l''}{\rho''} \cos B_m dA_{12} + b'' \frac{dtgS}{\mu}; \quad (9.4)$$

$$\text{де } \frac{dS}{S} = d \ln S = \frac{d \lg S}{\mu}$$

Прнцьому dB2 знаходиться в кутовій мірі. Формула (9.4) зкінцеваю формулою для отримання поправки в широту для другого пункту.

Аналогічно знайдем поправку в азимут і довготу, диференціюючи:

$$\frac{\partial l}{\partial B_m}; \frac{\partial l}{\partial A_m}; \frac{\partial l}{\partial S};$$

$$l = [2]_m S \sin A_m \sec B_m$$

$$\frac{\partial l}{\partial B_m} = S \sin A_m \frac{\partial}{\partial B_m} \left\{ \frac{\rho''}{a} (1 - e^2 S \sin^2 B_m)^{1/2} \sec B_m \right\} = \frac{S \rho''}{a} \sin A_m \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2} (1 - e^2 \sin^2 B_m)^{-1/2} (-2e^2 \sin B_m \cos B_m) \right\};$$

$$\frac{\partial l}{\partial B_m} = [2]_m S \sin A_m \sec B_m [tg B_m - e^2 \sin B_m \cos B_m - e^4 \sin^3 B_m \cos B_m]$$

$$\frac{\partial l}{\partial B_m} = l'' tg B_m; \quad (z)$$

$$\frac{\partial l}{\partial A_m} = [2]_m S \sec B_m \cos A_m = b \sec B_m; \quad (d)$$

$$\frac{\partial l}{\partial S} = \frac{l}{S}; \quad (e)$$

З врахуванням (г, д, е) і (9,3), одержимо:

$$dL_2 = dL_1 + \frac{l''}{\partial''} tg B_m dB_1 + \frac{b''}{\partial \rho''} \sec B_m dA_{1,2} + l'' \frac{dtg S}{\mu}; \quad (9.5)$$

Диференціюючи формулу:

$$l [2]_m S \sin A_m tg B_m;$$

Для азимута одержимо.

$$\frac{\partial t}{\partial B_m} = l'' \sec B_m (1 - e^2 \sin^1 B_m \cos^2 B_m - e^4 \sin^4 B_m \cos^2 B_m);$$

$$\frac{\partial t}{\partial B_m} = l'' \sec B_m; \quad (ж)$$

$$\frac{\partial t}{\partial A_m} = [2] S \cos A_m tg B_m = b tg B_m; \quad (з)$$

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{t}{S}; \quad (и)$$

$$dA_{2,1} = dA_{1,2} + \frac{l''}{\rho''} \sec B_m dB_1 + \frac{b''}{\rho''} tg B_m dA_{1,2} + t'' \frac{dtg S}{\mu}; \quad (9.6)$$

Значення B_m береться з попередніх даних.

9.3. Спрощені диференціальні формули другого роду.

Спочатку мали еліпсоїд з параметрами a_1, e_1, a_1 . Необхідно обчислити ланку триагуляції на новому еліпсоїді a_2, e_2, a_2

В ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ ЗОПИШЕМО:

$$\left. \begin{aligned} db &= \frac{\partial b}{\partial a} da + \frac{\partial^2 b}{\partial e^2} de^2; \\ dl &= \frac{\partial l}{\partial a} da + \frac{\partial e}{\partial e^2} de^2; \\ dt &= \frac{\partial t}{\partial a} da + \frac{\partial t}{\partial e^2} de^2; \end{aligned} \right\} (9.7)$$

Приймаючи до уваги, що:

$$b = [1]_m S \cos A_m = \frac{\rho'' \left(1 - e^2 \sin^2 B_m\right)^{1/2}}{a(1 - e^2)} S \cos A_m; \quad e^2 \approx 2a;$$

$$\frac{\partial b}{\partial a} = -\frac{b}{a}; \quad (i)$$

$$\frac{\partial b}{\partial e^2} = \frac{\rho''}{a} S \cos A_m \frac{\partial}{\partial e^2} \left\{ \frac{\left(1 - e^2 \sin^2 B_m\right)^{1/2}}{(1 - e^2)} \right\};$$

$$\frac{\partial b}{\partial e^2} = [1]_m S \cos A_m \left\{ \frac{1}{1 - e^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin^2 B_m}{1 - e^2 \sin^2 B_m} \right\};$$

Розкладаючи $\frac{1}{1 - e^2}$; в ряд і обмежуючись першими членами розкладу,

$$\frac{\partial b}{\partial e^2} = [1]_m S \cos A_m \left\{ 1 - \frac{3}{2} \sin^2 B_m \right\};$$

одержимо:
$$\frac{\partial b}{\partial e^2} = \frac{b}{2} (2 - 3 \sin^2 B_m) \quad (i)$$

$$db = -\frac{d}{a} da + \frac{b}{2} (2 - 3 \sin^2 B_m) 2d\alpha$$

з врахуванням: $e^2 \approx 2\alpha$; $de = 2d\alpha$;

Одержим:
$$db = -b \left[\frac{da}{a} - (2 - 3 \sin^2 B_m) da \right]; \quad (9.8)$$

По формулі (9.8) обчислюють поправку в широту Диференціюючи формулу

$$l = [2]_m S \sin A_m \sec B_m; \quad \frac{\partial l}{\partial a} = -\frac{l}{a}; \quad (k)$$

$$\frac{\partial l}{\partial e^2} = -l \left[\frac{1}{2} \sin^2 B_m (1 + e^2 \sin^2 B_m) \right];$$

$$l^* = [2]_m S \sin A_m \sec B_m = \frac{\rho^*}{a} (1 - e^2 \sin^2 B_m)^{1/2} S \sin A_m \sec B_m;$$

$$\frac{\partial l}{\partial e^2} = -l^* \frac{\sin^2 B_m}{2}; \quad (n)$$

$$dl = -l \frac{da}{a} - \frac{l^*}{2} \sin^2 B_m 2d\alpha;$$

$$dl = -l^* \left[\frac{da}{a} + \sin^2 B_m d\alpha \right]; \quad (9.9)$$

$$\frac{\partial t}{\partial a} = -\frac{t}{a}; \quad \frac{\partial t}{\partial e^2} = -\frac{t'' \sin^2 B_m}{2}; \quad t = [2]S \sin A_m \operatorname{tg} B_m;$$

$$dt = -t'' \left[\frac{da}{a} + \sin^2 B_m d\alpha \right]; \quad (9.10)$$

Формули (9.8), (9.9), (9.10) і рiшають поставлену задачу.

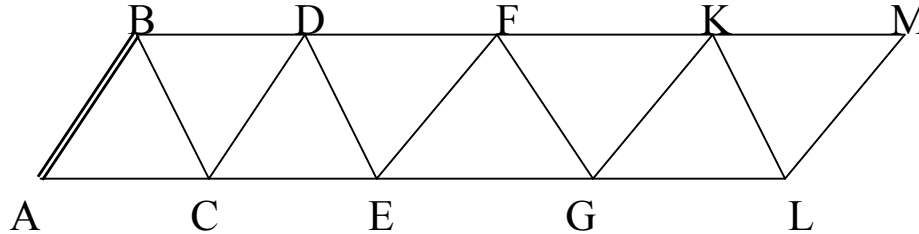


Рис.9 2.Ряд триангуляції.

Тверда точка А не отримає змiну. По диференцiальним формулам обчислюються координати наступного пункту по ходовiй лiнii db, dl, dt . для пункту С, а для Е, G, L по формулах 1 -го i 2-го роду.

Роздiл 8

Лекцiя №10. Система плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера

10.1. Загальнi положення.

Для крупномасштабного картографування необхідна проекцiя, яка б , забезпечувала збереження подiбного зображення фiгур (контурiв) при переходi з поверхнi елiпсоїда на площину при мiнимальному спотвореннi розмiрiв фiгур i легкому їх врахуваннi.

Даним вимогам вiдповiдає прийнята в бувшому Союзi з 1928 року, безперечно-цилiндрична рiвнокутна проекцiя Гаусса-Крюгера.

Розмiщують елiпсоїд всерединi цилiндра так, щоб мала вiсь обертання була перпендикулярна до осi цилiндра, а середнiй (осьовий) меридiан шести- або трюхградусної зони був дотичним до поверхнi цилiндра. Пiсля проектують на цю поверхню мiжмеридiанну зону, розрiзають цилiндр, розвертають в площину i переносять на папiр у вiдповiдному зменшеннi. Неминучi при цьому спотворення зображень елементiв мiсцевостi на паперi можна обмежити до необхідних границь пiдбором розмiрiв зон мiж меридiанами.

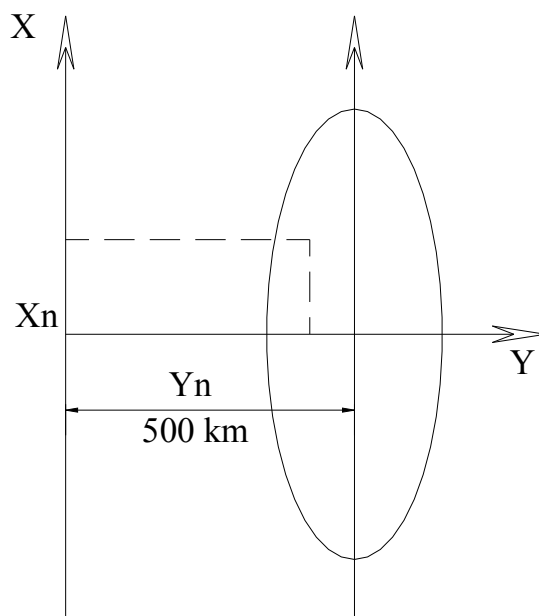


Рис. 10.4. Перетворені координати

В дійсній системі координат початок координат знаходиться в точці перетину осьового меридіана зони з екватором. Щоб зробити значення всіх ординат зони додатніми, лінія абсцис виноситься на 500км на -захід від осьового меридіану. Координати в цій системі координат називаються перетвореними.

Ключ переходу від дійсних координат X_d, Y_d до перетворених X_n, Y_n буде

$$\left. \begin{aligned} y_n &= y_d = 5000\text{км} \\ X_d &= X_n; \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

і навпаки

$$\left. \begin{aligned} y_d &= Y_n - 5000\text{км} \\ X_n &= X_d \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Номер координатної зони проставляється першою цифрою (числом) попереду ординати.

Кінцева практична ціль триангуляційних і полігонометричних робіт заключається у визначенні положення геодезичних пунктів на поверхні прийнятого референц-еліпсоїда.

Математично закон зображення еліпсоїда на площину можна представити в загальному вигляді

$$\left. \begin{aligned} X &= f_1(B, L) \\ y &= f_2(B, L) \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

де x, y - плоскі прямокутні координати зображення на площині точки.
При виборі закону зображення еліпсоїда на площині необхідно забезпечити єдину систему плоских координат на всю територію країни.

Конкретні вимоги до f_1 і f_2 мінімальне спотворення зображені на площині елементів поверхні еліпсоїда; простота врахування спотворень.

Якщо координати опорних геодезичних пунктів дані в проекції, то топоплани не вимагають ніякого укладання на площину шляхом редрукування.

Графічні матеріали знімачь одержують в прийнятій проекції і тільки числові дані у вигляді довжин ліній та кутів, які міряють на місцевості, повинні бути виправлені за перехід до проекції.

Доцільно враховувати тільки спотворення довжин ліній, щоб масштаб зображення був скрізь однаковий. Така умова вимагає вибору рівнокутної або конформної проекції, для якої кутові спотворення при переході з еліпсоїда на площину відсутні, а масштаб лінійних спотворень однаковий на всіх напрямках.

10.2. Вивід формул для обчислення прямокутних сфероїдальних координат по геодезичним.

Виведення формул для обчислення плоских прямокутних координат точки по її широті і довготі, які приміняються в шестиградусній зоні, і виходять за рамки нашого курсу.

Одержимо скорочені формули, якими практично можна користуватися .

Спочатку одержимо формули для обчислення по широті і довготі точки її прямокутних сфероїдальних координат, а після від них перейдемо до плоских прямокутних.

При такому обмеженні (полоси по довготі до 140 км) Землю, без відчутної похибки, можна прийняти за сферу.

В системі прямокутних сфероїдальних координат на поверхні еліпсоїда за вісь X приймають меридіан, який проходить через яку-небудь завчасно вибрану точку, яка є початком координат. Такою точкою може бути, наприклад, астрономічна обсерваторія, або яка-небудь точка з відомими широтою і довготою. За вісь X приймають також середній меридіан зони (осьовий).

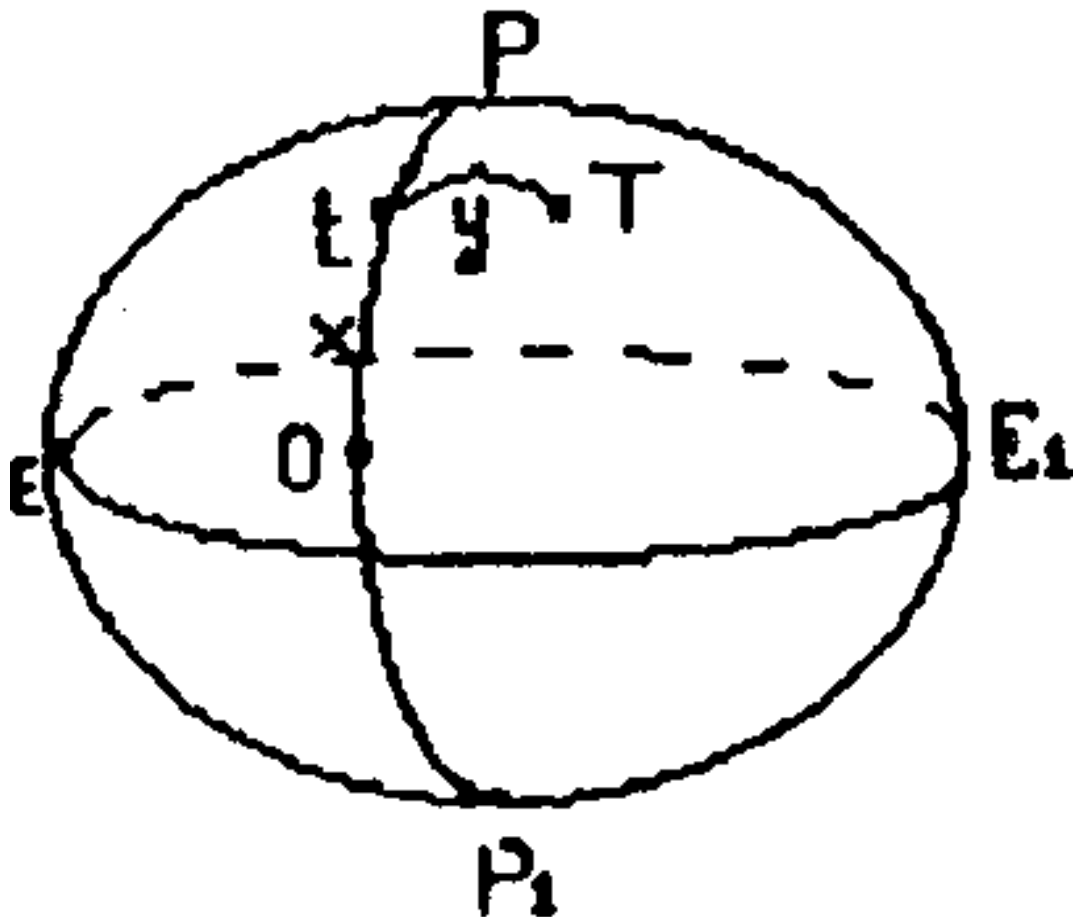


Рис. 10.5. Точка Т на поверхні еліпсоїда.

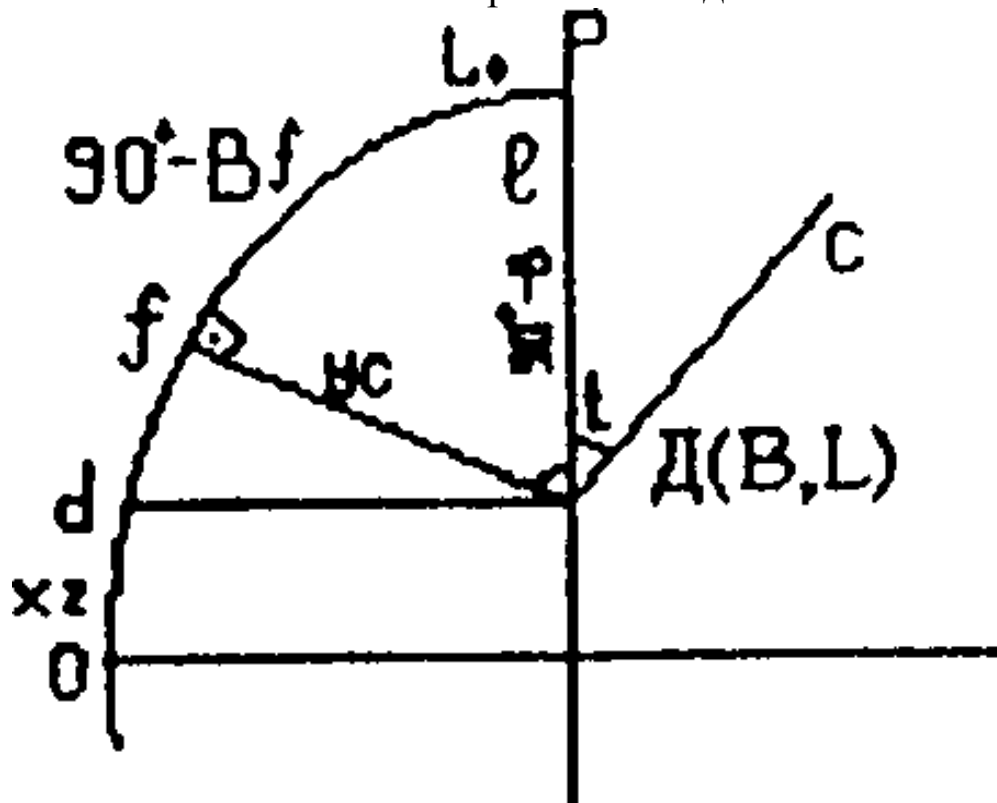


Рис. 10.6. Точка Д на поверхні сфери.

Положення точки Т на поверхні еліпсоїда визначають ординатою $Tt = y$ і абсцисою $X = Ot$. **Ордината** - це дуга першого вертикала в точці t (тобто в точці в меридіані, прийнятому за вісь X), який проходить через визначаему

точку. Або точніше - геодезична лінія, яка проходить від даної точки до меридіана, прийнятого за вісь X, під прямим кутом до нього. **Абсциса** - це дуга Ot меридіана від прийнятого початку координат до основи ординати. На рис. 10.6 PfO - осьовий меридіан зони з довготою L_0 ; D - точка на поверхні сфери з широтою B і довготою L ; O - точка пересічення осьового меридіана з екватором; Df - дуга першого вертикала в точці f або сферична ордината точки D позначимо її через U_s ; Dd - паралель точки D . DC - лінія, паралельна осьовому меридіану, це дуга січення сфероїда площиною паралельною площині осьового меридіана. Of - сферична абсциса точки D , позначимо її через X_s ; t - зближення меридіанів.

Позначимо широту точки f через B_f . Радіус сфери прийемо рівним N - радіусу кривизни першого вертикалу в точці D .

В прямокутному сферичному трикутнику fPD відомі $\angle fPD = L - L_0 = 1$.

Сторона $PD = 90^\circ - B$.

Виражаючи сторону fD , рівну U_s в долях радіуса, користуючись правилом Непера (сферичної тригонометрії): якщо катети прямокутного сферичного трикутника замінити їх доповненнями до 90° і не рахувати прямого кута, то:

- косинус окремо стоячого елемента в прямокутному трикутнику дорівнює добутку синусів елементів, несуміжних з ним;
- косинус середнього елемента дорівнює добутку котангенсів крайніх суміжних з ним елементів;

можемо записати

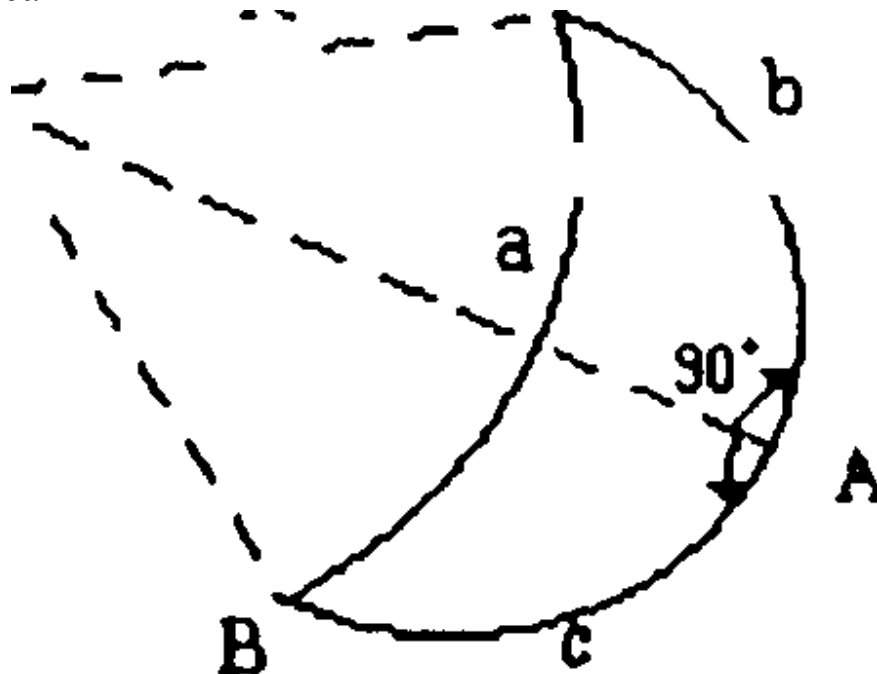


Рис. 10.7. Сферичний трикутник

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c; \quad \sin c = \sin a \sin C \\ \cos a &= \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C; \quad \cos C = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b \\ \cos B &= \sin C \cos b; \quad \sin b = \operatorname{ctg} C \operatorname{tg} c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos C &= \sin B \cos c; \cos B = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c \\ \sin b &= \sin a \sin B; \sin c = \operatorname{ctg} B \operatorname{tg} b \end{aligned}$$

$$\cos\left(90 - \frac{Y_c}{N}\right) = \sin l \sin(90 - B),$$

$$\sin \frac{Y_c}{N} = \sin l \cos B, \quad (10.4)$$

$$\cos l = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg}(90 - B)$$

$$\cos l = \operatorname{ctg} B \operatorname{tg} B, \quad (10.5)$$

$$\cos(90 - B) = \operatorname{ctg} l \cdot \operatorname{ctg}(90 - l),$$

$$\operatorname{tg} l = \operatorname{tg} l \sin B \quad (10.6)$$

Пригадаємо розклад в ряд

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \dots$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \dots$$

Обмежувачись для малих величин $\sin \frac{\operatorname{tg}}{N}$ і $\sin l$ двома членами ряду,

одержимо:

$$\frac{Y_c''}{N} - \frac{Y_c^3}{6N^3} = \left(l - \frac{l^3}{6}\right) \cos B,$$

так як широта постійна для даної паралелі.

Після деяких перетворень, запишемо

$$\frac{Y_c}{N} = l \cos B - \frac{l^3 \cos B}{6} - \frac{Y_c^3}{6N^3}$$

Для останнього малого члена $\frac{Y_c^3}{6N^3}$ можна прийняти

$$\frac{Y_c}{N} = l \cos B,$$

тоді

$$Y_c = Nl \cos B - \frac{Nl^3 \cos B}{6} + \frac{N^3 l^3 \cos B}{6},$$

$$Y_c = Nl \cos B \left(1 - \frac{l^2}{6} + \frac{l^2 \cos^2 B}{6}\right) = Nl \cos B \left(1 - \frac{l^2}{6} \sin^2 B\right).$$

Переходячи до градусної міри, одержимо:

$$Y_c = \frac{l''}{\rho''} N \cos B \left(1 - \frac{l''^2}{6\rho''^2} \sin^2 B\right) \quad (10.7)$$

Одержимо формулу для зближення меридіанів.

Прийmemo для малих величин tgt і tgl по два члени ряду і тоді по формулі (10.6) одержимо:

$$t + \frac{1}{3}t^3 = \left(l + \frac{1}{3}l^3\right) \sin B.$$

В малому члені $\frac{1}{3}t^3$ прийmemo для t його наближене значення $l \sin B$, тоді

$$t = l \sin B - \frac{1}{3}l^3 \sin^3 B,$$

$$t = l \sin B \left(1 + \frac{1}{3}l^2 - \frac{1}{3}l^2 \sin^2 B\right),$$

$$t = l \sin B + \frac{1}{3}l^3 \sin B \cos^2 B.$$

Або в градусній мірі

$$t'' = l'' \sin B + \frac{l''^3}{3\rho''^2} \sin B \cos^2 B \quad (10.8)$$

Абсцису X_c легко одержим, якщо будемо знати довжину дуги меридіана від екватора до паралелі з широтою B і дугу df . Позначимо довжину дуги від екватора до паралелі з широтою B через X , тоді з рис. 10.6

$$X_c = X + df.$$

Довжини дуг меридіана від екватора до паралелей злюбими широтами можна вирахувати завчасно або взяти готовими з таблиць (див. лабораторну роботу №1), тому для визначення абсциси X_c необхідно тільки одержати формулу для обчислення дуги df або, що те ж саме, дуги $(X_c - X)$.

По (10.5) визначимо $\text{tg} B$

$$tgB = \cos l tgB_f$$

Обмежуючись для $\cos l$ трьома членами ряду,

$$tgB = \left(1 - \frac{l^2}{2} + \frac{l^4}{24}\right) tgB_f,$$

звідки

$$tgB_f - tgB = \frac{l^2}{2} \left(1 - \frac{l^2}{12}\right) tgB_f,$$

$$\sin(B_f - B) = \frac{l^2}{2} \left(1 - \frac{l^2}{12}\right) \sin B_f \cos B,$$

бо

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}.$$

В сферичному трикутнику fPD

$$\sin B = \sin B_f \cos \frac{Y_C}{N},$$

тому

$$\sin B_f = \frac{\sin B}{\cos \frac{Y_C}{N}}.$$

Тепер можемо записати

$$\sin(B_f - B) = \frac{l^2}{2} \left(1 - \frac{l^2}{12}\right) \frac{\sin B \cos B}{\cos \frac{Y_C}{N}}.$$

Для малої величини $\cos \frac{Y_C}{N}$ приймем два члени ряду, тоді

$$\cos \frac{Y_C}{N} = 1 - \frac{Y_C^2}{2N^2}; \quad \frac{1}{\cos \frac{Y_C}{N}} = \left(1 - \frac{Y_C^2}{2N^2}\right)^{-1}$$

Приймаючи до цього двочлена формулу бінома Ньютона і обмежуючись двома його членами, одержимо

$$\frac{1}{\cos \frac{Y_c}{N}} = 1 + \frac{Y_c^2}{2N^2}$$

Для малго члена $\frac{Y_c^2}{2N^2}$ можна прийняти

$$\frac{Y_c}{N} = l \cos B, \quad \text{тоді} \quad \frac{1}{\cos \frac{Y_c}{N}} = 1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{2}.$$

Тепер формула для $\sin(B_f - B)$ прийме вигляд

$$\sin(B_f - B) = \frac{l^2}{2} \left(1 - \frac{l^2}{12}\right) \left(1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{2}\right) \sin B \cos B.$$

Виразимо $(B_f - B)$ в секундах дуги і обмежуючись для $\sin(B_f - B)$ одним членом ряду, так як дуга $(B_f - B)$ мала, одержимо

$$(B_f - B)'' = \frac{1''^2 \sin B \cos B}{2p''} \left(1 - \frac{l^2}{12}\right) \cdot \left(1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{2}\right).$$

Маючи різницю широт точок f і d визначимо шукану довжину дуги $fd = X_c - X$,

$$X_c - X = \frac{(B_f - B)''}{p''} N,$$

$$X_c - X = \frac{Nl''^2}{2p''^2} \sin B \cos B \left(1 - \frac{l^2}{12} + \frac{l^2}{2} \cos^2 B\right),$$

(при множенні виразів в дужках, останній член $\frac{l^4}{24} \cos^2 B$ відкинутий за малістю). Роблячи подальші перетворення, послідовно будемо мати.

$$X_c - X = \frac{Nl''^2}{2p''^2} \sin B \cos B + \frac{Nl''^2}{2p''^2} \sin B \cos B \left(\frac{l^2 \cos^2 B}{2} - \frac{l^2}{12} \right),$$

$$X_c - X = \frac{Nl''^2}{2p''^2} \sin B \cos B + \frac{Nl''^4}{24p''^4} \sin B \cos B (6 \cos^2 B - 1)$$

так як

$$6 \cos^2 B - 1 = 6 \cos^2 B - \sin^2 B - \cos^2 B = 5 \cos^2 B - \sin^2 B$$

одержимо

$$X_c - X = \frac{Nl''^2}{2p''^2} \sin B \cos B + \frac{Nl''^4}{24p''^4} \sin B \cos^3 B (5 - \operatorname{tg}^2 B),$$

$$X_c = X + (X_c - X) = X + \frac{Nl''^2}{2p''^2} \sin B \cos B + \frac{Nl''^4}{24p''^4} \sin B \cos^3 B (5 - \operatorname{tg}^2 B). \quad (10.9)$$

Лекція №11. Зв'язок геодезичних і плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера. Редукування вимірів.

11.1. Розрахунок прямокутних координат Гаусса-Крюгера по геодезичним.

Координати точок в проекції Гаусса коротко називають координатами Гаусса.

По умовам проекції абсциси X точок в координатах Гаусса рівні сфероїдальним абсцисами X_c і розраховуються по формулі (10.9)

Але ординати Y точок в координатах Гаусса не рівні їх сфероїдальним ординатам Y_c .

Ординати точок Y необхідно одержати з умовою масштабу

$$n = 1 + \frac{Y_c^2}{2R^2}. \quad (11.1)$$

Тому формулою (10.7) користуватися не можна.

Без виводу запишемо, що ординати точок Y одержують по формулі

$$Y = \frac{l''}{\rho''} N \cos B + \frac{l''^3}{6p''^3} N \cos^3 B (1 - \operatorname{tg}^2 B) \quad (11.2)$$

По формулах (10.9) і (11.2) можна робити обчислення в межах двохградусної зони, тобто при $l \leq 1^\circ$ При $l > 1^\circ$ приміняють формули

$$x = X + \frac{l''^2}{2p''^2} N \sin B \cos B \left\{ 1 + \frac{l''^2 \cos^2 B}{12p''^2} (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^2) + \frac{l''^4 \cos^4 B}{360p''^4} \cdot (61 - 58t^2 + t^4) \right\} \quad (11.3)$$

$$y = \frac{l''}{p''} N \cos B \left\{ 1 + \frac{l''^2 \cos^2 B}{6p''^2} (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{l''^4 \cos^4 B}{120p''^4} \cdot (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2) \right\}, \quad (11.4)$$

де

$$t = \operatorname{tg} B; \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 B; \quad 1 + \eta^2 = V^2;$$

Широти і довготи вираховують в триангуляції 1 класу до 0,0001"; координати x, y - до 0,001 м. Значення ординат y одержують відносно осьового меридіана зони.

11.2. Визначення геодезичних координат B і L по координатам Гаусса-Крюгера x, y .

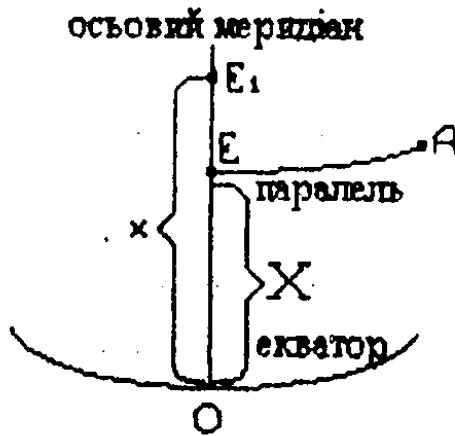


Рис. 11.1. Точка А на еліпсоїді

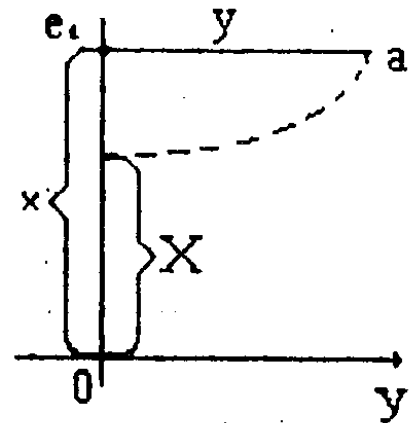


Рис. 11.2. Точка а на площині

Ця задача є оберненою по відношенню до попередньої. Нехай дані прямокутні координати точки x, y і довгота осьового меридіана зони Lo . треба визначити геодезичні координати цієї точки.

На рис. 11.2. задана абсциса x точки a визначається прямою oe_1 , яка повинна дорівнювати довжині дуги меридіана від екватора до деякої точки E_1 широту якої позначим через B_1 , тобто, при $y = 0$ і $l = 0$.

Приведем без виводу формули, які задовільняють по точності всі випадки практики.

Точні формули в кінцевому вигляді.

$$l'' = \frac{y}{N_1 \cos B_1} p'' \left[1 - \frac{y^2}{6N_1^2} (1 + 2t_1^2 + \eta^2) + \frac{y^4}{120N_1^4} \cdot (5 + 28t_1^2 + 24t_1^4 + 6\eta_1^2 + 8\eta_1^2 t_1^2) \right]; \quad (11.5)$$

$$B = B_1 - \frac{Y^2}{2M_1 N_1} t_1 p'' \left[1 - \frac{Y^2}{12N_1^2} (5 + 3t_1^2 + \eta_1^2 - 9\eta_1^2 t_1^2) + \frac{Y^2}{360N_1^4} (61 + 90t_1^2 + 45t_1^4) \right]; \quad (11.6)$$

де

$$N = \frac{c}{V}; \quad c = \frac{a^2}{b}; \quad V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}; \quad M = \frac{c}{V^3}.$$

Широта B_1 легко знаходиться по x із таблиць довжин дуг меридіанів

11.3. Перетворення прямокутних координат із однієї зони в другу.

Задача перетворення прямокутних координат із однієї зони в другу заключається в тому, щоб по заданим координатам точки X_1, Y_1 в системі зони I з осьовим меридіаном L_0^I визначити координати X_{II}, Y_{II} цієї ж точки в системі зони II з осьовим меридіаном L_0^{II}

Найбільш точний і універсальний спосіб.

За формулами (11.5), (11.6) переходять від прямокутних координат точки X_1, Y_1 , заданих в системі I зони з осьовим меридіаном L_0^I , до геодезичних координат $B_1 L_1$, від яких переходять по формулам (11.3), (11.4) до прямокутних координат X_{II}, Y_{II} в системі другої зони з осьовим меридіаном L_0^{II} . Для контролю перетворення координат рекомендується виконувати два рази, тобто після переходу, наприклад, із східної зони в західну, зробити обернений перехід із західної зони в східну.

Програма розрахунку прямокутних координат по геодезичним.

Фпрг	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	5	XП4	9	XП0	С/П	КХП 4	FL0	04	С/П	$K_{ou} \rightarrow$
10	XП3	6	:	K[x]	6	Ж	3	+	С/П	ПХ3
20	—	ПХВ	Ж	ПХ9	:	Fx^2	XП5	С/П	$K_{ou} \rightarrow$	XП О
30	Fcos	XП2	Fx^2	XП3	О	.	6	*	1	О
40	9	—	ПХ3	*	ПХ 7	+	ПХ3	*	ПХ6	—
50	XП4	ПХ8	ПХ3	*	ПХ e	—	ПХ5	*	О	.
60	5	+	ПХ5	*	ПХ 4	*	ПХ С	ПХ3	*	—
70	ПХа	+	ПХ О	Fsin	*	ПХ2	*	XП1	ПХd	ПХ О
80	*	ПХВ	*	ПХ9	:	ПХ1	—	С/П	ПХ5	$F_{\sqrt{}}$
90	ПХ4	*	ПХ2	*	XП 1	С/П	ПХ3	*	С/П	—
100	ПХ5	*	1	+	С/П	F	АВТ			

В ручному розрахунку

ПХ1	*	•	/ /	У	ПХ5	$F_{\sqrt{}}$	ПХ О	Fsin	*	K_{ol}	1
-----	---	---	-----	---	-----	---------------	---------	------	---	----------	---

11.4. Загальні відомості про одержання вихідних даних на площині.

Необхідно від довжини сторони S_{ik} і її геодезичного азимута A_{ik} на поверхні земного еліпсоїда перейти до довжини S_{ik} і дирекційного кута α_{ik} на площині по спеціальним формулам.

В принципі ці величини можна було б визначити по формулам

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{ik} &= \frac{Y_k - Y_i}{X_k - X_i}; S_{ik} = \frac{X_k - X_i}{\cos \alpha_{ik}} = \frac{Y_k - Y_i}{\sin \alpha_{ik}} \\ S_{ik}^2 &= (X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2 \end{aligned} \right\} (11.7)$$

де X_i, Y_i, X_k, Y_k - прямокутні координати кінців сторони S_{ik} , які розраховуються по геодезичним координатам B_i, L_i, B_k, L_k .

Однак такий шлях не є найкращим, так як приводить до зниження точності визначення дирекційних кутів і довжин сторін на площині.

Диференціюючи першу і останню формули по координатам X і Y кінців сторони S_{ik} , переходимо до середньої квадратичної похибки. Прийmemo

$$m_{xi} = m_{xk} = m_{yi} = m_{yk} = m_{xy}$$

$$\text{Одержимо } m_{\alpha_{in}} = \frac{m_{xy}}{S_{ik}} \rho'' \sqrt{2} \quad (11.8)$$

$$m_{S_{ik}} = m_{xy} \sqrt{2} \quad (11.9)$$

В триангуляції 2 класу при рішенні прямої геодезичної задачі на площині можна чекати похибки до 0,01 м в кожній із координат. Приймаючи $S_{ik} = 2\text{км}$, знайдемо $m_{\alpha_{in}} = 0,15''$ і $m_{S_{ik}} = 0,014\text{м}$

Зі зменшенням віддалі S_{ik} похибка дирекційного кута α_{ik} буде зростати, тому надають перевагу другому шляху, який розглянемо далі.

11.5. Формули для редукування віддалей і напрямків на площину.

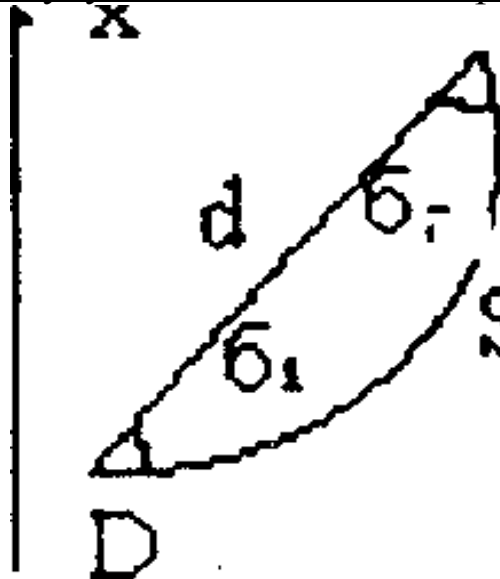


Рис. 11.3. Редукування віддалі

Лінія на поверхні еліпсоїда (геодезична лінія) нормальне січення довжиною S відображається в проекції Гаусса кривою, яка має довжину S . Позначимо безкінечно малі елементи цих ліній відповідно через dS і ds

По визначенню масштабу напишемо

$$\frac{ds}{dS} = m = n = 1 + \frac{Y_C^2}{2R^2},$$

де m і n - спотворення по осі X і Y .

Замінімо сфероїдальну ординату Y_C ординатою Гаусса. Тоді одержимо

$$ds = \left(1 + \frac{Y_C^2}{2R^2}\right) dS$$

Невеликі по довжині лінії (до 10-12км) можна практично вважати безконечно малими в порівнянні з розмірами Землі і прийняти $dS = S$ і $ds = s$

Для ординати Y приймем середнє значення Y_m із ординат кінцевих точок ліній, тоді

$$s = \left(1 + \frac{Y_m^2}{2R^2}\right) S; \quad s = S + \frac{Y_m^2}{2R^2} S \quad (11.10)$$

Радіус R можна брати для середньої широти значної по розмірам території. Величина $Y_m^2 / 2R^2$ завжди додатня, тому довжини зображення лінії в проекції Гаусса завжди більші довжин відповідних ліній на поверхні еліпсоїда.

Формула (11.10) показує, що в довжини ліній, які переносять з еліпсоїда

на проекцію Гаусса (виміряні базисні сторони триангуляції, сторони полігонометричних ходів) треба вводити поправку, рівну

$$Y_m^2 \cdot S / 2R^2$$

Ці поправки називаються редукцією віддалі.

Кути β_1 і β_2 , які утворює крива з хордою, малі, тому практично можна прийняти довжину хорди рівну довжині кривої. Позначивши довжину хорди через d , можемо записати

$$d = S + \frac{Y_m^2}{2R^2} S \quad (11.11)$$

Ці формули можна використовувати в 3 і 4 класах і в мережах згущення. В триангуляції 2 класу приміняють більш повну формулу

$$d = S + \frac{Y_m^2}{2R^2} S + \frac{(Y_2 - Y_1)^2}{24R^2} S \quad (11.12)$$

В даній формулі Y_1 і Y_2 - ординати початкової і кінцевої точок лінії. Ординати точок достатньо вичисляти з точністю до 15 см.

Редукування напрямку.

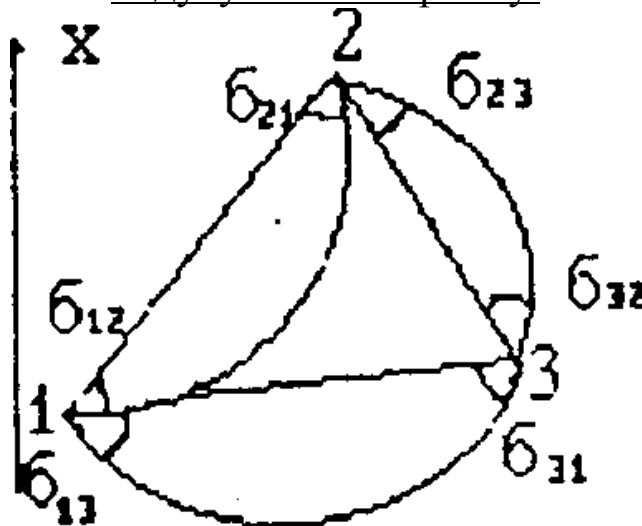


Рис.11.4. Редукування напрямку

Сторони трикутників триангуляції при переносі з поверхні еліпсоїда на площину в проекції Гаусса зображуються кривими, ввігнутими в сторону осі абсцис. Кути β називаються поправками за кривизну зображення геодезичних ліній на площині в проекції Гаусса, або коротко - редукціями напрямків.

Для розрахунку поправок β з точністю порядку 0,1" приміняють формулу

$$\beta''_{12} = -\beta''_{21} = -0,000253(X_2 - X_1)U_m \quad (11.13)$$

Ці поправки алгебраїчно прибавляють до значень виміряних напрямків. Абсциси необхідно знати з точністю до 1-2м в триангуляції і полігонометрії 1 класу, до 10м в мережах 2 класу і до 0,1км в мережах нижчих класів.

11.6. Перехід від геодезичних азимутів до дирекційних кутів.

Дирекційний кут α_{12} хорди S_{12} , яка з'єднує точки 1 і 2 на площині при заданому значенні азимута A_{12} геодезичної лінії на поверхні еліпсоїда між цими точками, вивисляють по формулі

$$\alpha_{12} = A_{12} - (\pm y_{12}) + (\pm b_{12}), \quad (11.14)$$

де y_{12} - гаусове зближення меридіанів на площині в точці 1;

b_{12} - поправка за кривизну зображення геодезичної лінії, яку знаходять по формулі (11.13).

Якщо кут у необхідно визначити з точністю 0,1", то

$$\gamma = l \sin B + \frac{1}{3} \cdot \frac{l^3}{\rho''^2} \sin B \cos^2 B \quad (11.15)$$

При обчисленні кута у з точністю до 0,1' в межах шестиградусної зони

$$\gamma = l \sin B \quad (11.16)$$

де $l = L - L_0$, L - довгота точки; L_0 - довгота осьового меридіану

11.7. Нанесення кілометрових ліній на планшети топографічних знімачь.

Вставка географічної сітки в прямокутну.

При зніманні або складанні карти в проекції Гаусса-Крюгера побудова рамок і нанесення опорних пунктів виконується шляхом попереднього нанесення на креслярський лист кілометрової сітки в заданому масштабі з інтервалами (1; 2; 0,5; 0,2 км) в залежності від масштабу знімачь.

Відносно кілометрової сітки наносять вершини кутів трапецій і опорні пункти по їх координатам. Положення кілометрових ліній визначається вже при побудові рамок.

В практиці топографо-геодезичного виробництва виникає задача вставки географічної сітки в прямокутну. Нехай знімальний планшет зображується квадратом з вершинами $A(x_1, y_1)$; $B(x_1, y_2)$; $C(x_2, y_1)$; $D(x_2, y_2)$. Необхідно визначити положення меридіана F, F_1 і паралелі E, E_1 .

Очевидно, задача зводиться до визначення положення точок F, F_1, E, E_1 .

Для визначення точки P маєм абсцису лінії AB і задану довготу l меридіана, який повинен бути нанесений на планшет, необхідно визначити ординату y_f точки F .

$$Y_y = \frac{N_1 \cos B_1}{\rho''} \cdot l \left[1 + \frac{Y^2}{6N_1^2} (1 + 2t_1^2) \right] \quad (11.17)$$

Замінюючи в поправочному члені Y^2 через $\frac{l^2}{\rho^2} N_1^2 \cos^2 B_1$ одержим P

Формулу
$$Y_f = \frac{N_1 \cos B_1 l}{p''} \cdot \left[1 + \frac{l^2 \cos^2 B_1}{6 p''^2} (1 + 2t_1^2) \right] \quad (11.18)$$

Аналогічно обчислюється і ордината точки F1, але в цьому випадку широта B1 повинна бути визначена по абсцисі X2.

Для визначення абсциси XE маємо ординату У західної рамки і широту В паралелі EE1.

Широту B1 точки пересічення ординатної лінії точки E з осьовим меридіаном найдем по формулі

$$B_1 = B + (Y^2 p'' \cdot t) l 2MN \quad (11.19)$$

де M1, N1, t1 замінені через M, N, t без замітних для графічних побудов похибок. Шукану абсцису XE знаходять як дуну меридіана від екватора до широти B1. Аналогічно знаходять абсцису точки E1 по ординаті східної рамки

Протокол розрахунку

Введення даних	Результат	Позначення	Введення даних	Результат	Позначення	Введення даних	Результат	Позначення
В/С С/П 6099698,9С/П			135,3302С/П				28095655 · 10 ⁻³ С/П	l ²
20562,267С/П			63675535С/П			51'38'43,90"С/П		BG
0,23С/П			0,042С/П				5728374,6С/П	X
206264,8С/П			24° 02'13,14С/П		L		-210220,77	U
32140,404С/П				27	L ₀	0,3333333С/П		Y
3600С/П			21С/П		L ₀	0,1666666С/П		
						ПХ1*/-/	210198,15	Y

Теоретична геодезія.

Лекція №12.Зміст і предмет.

Теоретична геодезія є одним із розділів вищої геодезії. Задачм вищої геодезії— визначення форми і розмірів Землі, її зовнішнього гравітаційного поля.

Для визначення форми і розмірів Землі необхідно визначити координати точок зовнішньої поверхні в єдиній системі координат, які жорстко зв'язані з Землею.

Для визначення гравітаційного поля необхідно визначити потенціал сили тяжіння Землі на її поверхні та на всьому зовнішньому просторі.

Під геоїдом розуміють одну із різних поверхонь потенціала сили тяжіння, яка співпадає з поверхнею океанів і морів в спокійному стані подумки проведеного під сушу. Поверхня геоїда називається істиною або математичною фігурою Землі. В 1828 році Гаус вперше так назвав, хоча сама назва "геоїд"

належить Лістингу. Геоїд поверхня гладка (без ребер), в математичному відношенні дуже складна. Над океаном вона виражається одним видом функції, під материками—другим видом функції.

Геоїд

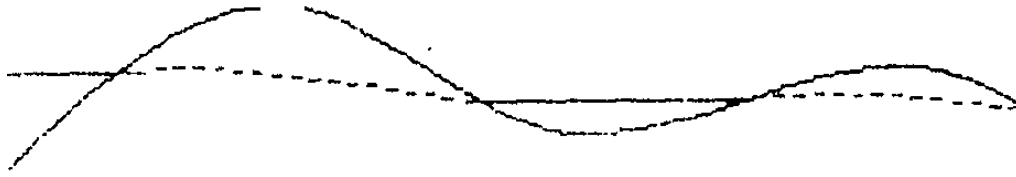


Рис. 12.1. Рівнева поверхня геоїда.

Геоїд близький до еліпсоїда обертання. Відступлення геоїда не перевищує 150-200 м, що являє собою велику величину в порівнянні з радіусом Землі, рівним 6371,11 км. Німецький геодезист Гельмерт і російський геодезист Слуцький в 1884 році ввели поняття загального земного еліпсоїда—еліпсоїда обертання найкращим чином підходячого до геоїда в цілому.

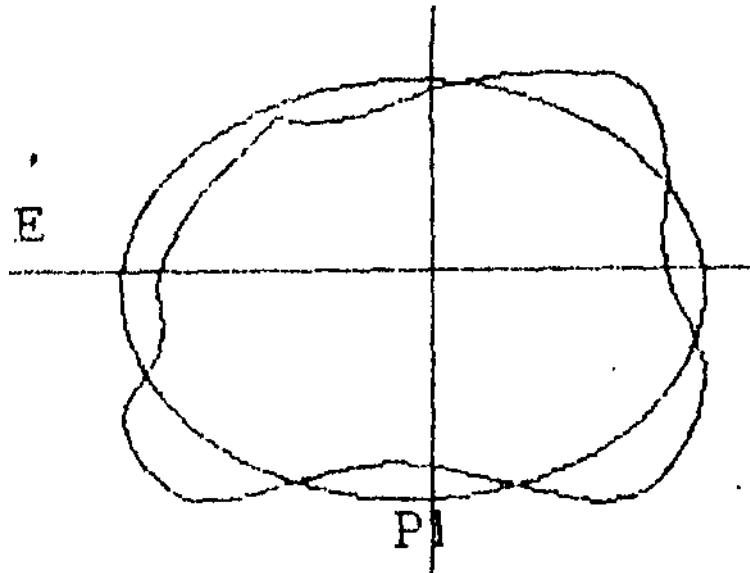


Рис. 12.2. Геоїд і еліпсоїд.

Елементи його—велика піввісь a і полярне стиснення, α повинні бути встановлені, виходячи із умов;

-центр еліпсоїда повинен співпадати з центром інерції Землі, а мала вісь— з віссю обертання Землі;

-сума квадратів ввідхилення геоїда по висоті від поверхні еліпсоїда повинна бути мінімальна.

$$\int_{\sigma} h^2 d\sigma = \min; (12.1)$$

рівневий еліпсоїд з розмірами загального земного еліпсоїда, з масою рівною масі Землі, який обертається навколо малої осі з кутовою швидкістю рівною швидкості обертання Землі стали розглядати як теоретичну модель Землі.

Коли говорять про параметри a і α то мають на увазі загальний земний еліпсоїд. Його елементи ще повністю не встановлені з високою точністю. Раніше все зв'язували з фігурою геоїда. Фігура геоїда під материками не може бути визначена за вимірами на земній поверхні землі. Необхідно знати розміщення щільностей мас в середині Землі.

На даний час основною задачею є визначення координат точок зовнішньої поверхні Землі. Теорією визначення фізичної поверхні Землі найбільш повно дав Молоденський. Він замість геоїда ввів допоміжну поверхню квазігеоїда (квазі— майже).

Ця поверхня на океанах в точності співпадає з геоїдом, а на материках відхиляється в горах на 1 -2 метри. Але ця поверхня не є рівневою.

Введення квазігеоїда дало можливість більш строго рішати задачі, адже поверхня може бути визначена без знання розподілення мас всередині Землі і висоти точок, також визначаються без знання розподілення мас. С Р

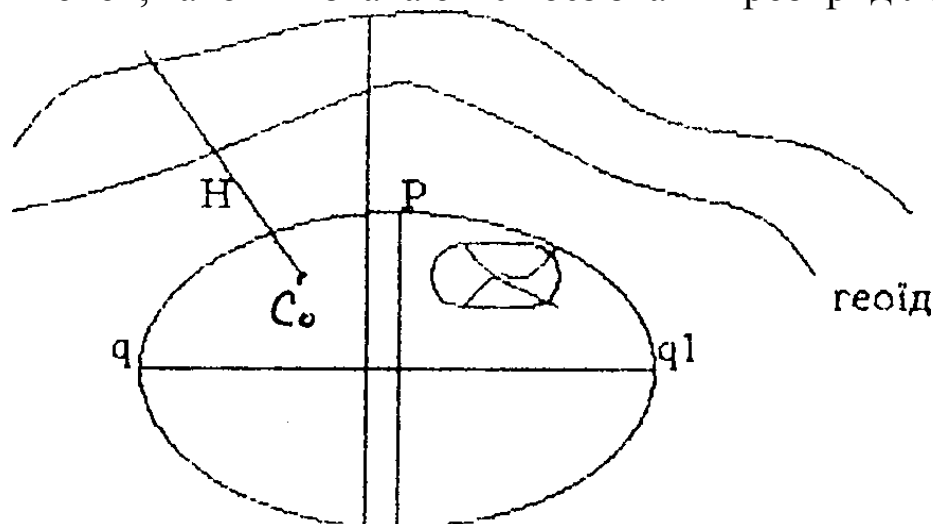


рис. 12.3.Референц-еліпсоїд.

Нехай, на поверхні Землі маєм точку $C(B,L,H)$, B,L —планові координати точки C , H —геодезична висота.

Якщо найдем B,L,H , то зможем побудувати референц-еліпсоїд розташували його так, щоб:

1) мала вісь референц-еліпсоїда була паралельна осі обертання Землі. Це буде головною умовою;

2) центр референц -еліпсоїда необхідно розташувати поблизу центра інерції Землі;

3) необхідно, щоб поверхня референц-еліпсоїда найбільш близько підходила до поверхні геоїда на розглядаємій території. Елементи референц-еліпсоїда звичайно беруть елементи загального земного еліпсоїда, визначеного тим чи іншим автором. В бувшому союзі був прийнятий еліпсоїд ЦНДІГАК Крясовського, в якого $B=6375245$, $\alpha = 1:298,3$ В США прийнятий еліпсоїд Кларка.

Координати B,L,H визначають по результатам геодезичних вимірів методом триангуляції, полігонометрії, нівелювання, астрономічних, визначень,

вимірювання сили тяжіння. Прийняте роздільне визначення планових координат B, L і висот H .

При визначенні B і L результати лінійних і кутових вимірів редукуються на поверхню прийнятого еліпсоїда, використовуючи плоскі прямокутні координати X і Y в триангуляції 2,3,4 класів,

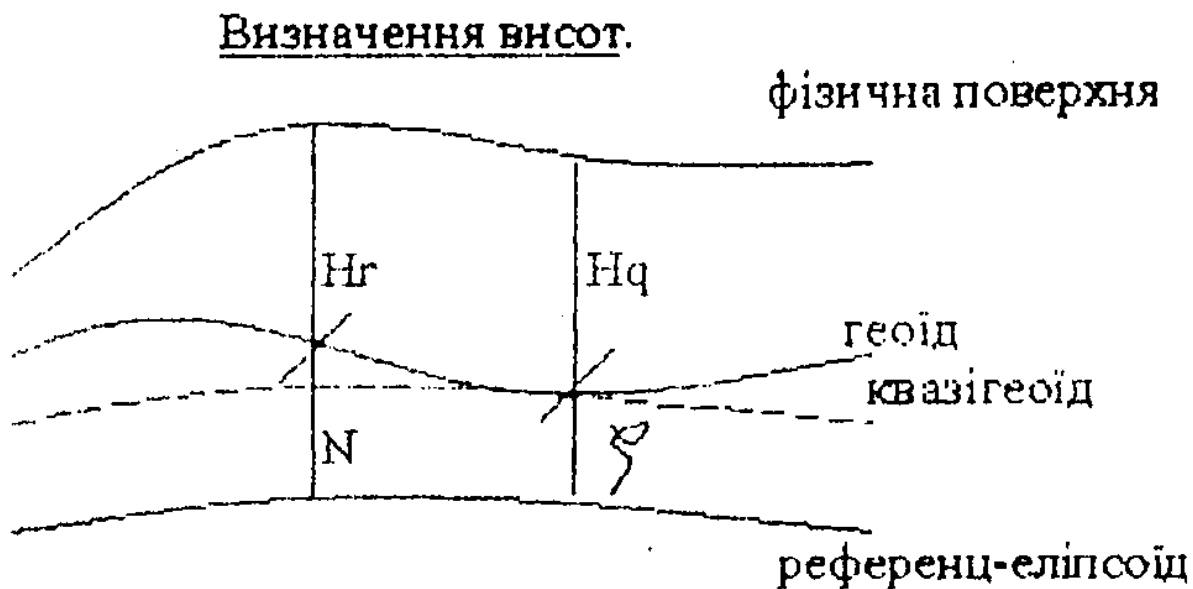


рис. 12.4. Визначення висот.

В класичній теорії висота H визначається як сума висоти H_r в даній точці над рівнем моря (геоїдом) і висоти N геоїда над еліпсоїдом:

$$H = H_r + N_1; \quad (12.2)$$

В теорії Молденського:

$$H = H_q + \zeta; \quad (12.3)$$

де: H_q -висота точки поверхні Землі над квазігеоїдом;

ζ - висота квазігеоїда над еліпсоїдом.

Висоти H_r і H_q являється гіпсометричним, тобто характеризуючими рельєф. Висоти N і ζ -геоїдальні висоти. Висоти H_r і H_q визначаються геометричним нівелюванням і вимірюванням сили тяжіння. Висоти N і ζ визначаються на основі сумісних геодезичних вимірювань, астрономічних вимірювань і визначення сили тяжіння методами або астрономічного нівелювання або астрономо-гравіметричного нівелювання.

Таким чином, порядок проведення робіт слідуючий:

- 1).на основі вимірів визначають елементи референц-еліпсоїда і його орієнтування в поверхні Землі;
- 2). задають координати BO, LO, NO в якому-небудь із пунктів вихідної сторони і AO . Ці величини задані в Пульківській обсерваторії;
- 3).редукують на поверхню референц-еліпсоїда і рішають геодезичні

задачі на поверхні референц-еліпсоїда.

На основі виконаних робіт ми можемо побудувати фізичну поверхню Землі в цій системі координат, але нічого не можемо сказати про центр мас Землі.

Одна із задач теоретичної геодезії - найти положення центра мас Землі в прийнятій системі координат.

Теоретична геодезія встановлює зв'язки між результатами визначень і величинами, які визначають поверхню Землі.

Задачі теоретичної геодезії.

1. Вивести елементи загальноземного еліпсоїда (сумісно з теорією фігури Землі).

2. Встановлення основної відлікової поверхні (референц-еліпсоїда).

3. Редукування результатів геодезичних вимірів на відлікову поверхню (проблема редукування).

4. Визначення висот точок фізичної поверхні Землі над геоїдом або квазігеоїдом.

5. Визначення відступлень геоїда або квазігеоїда від референц-еліпсоїда.

При цьому, теоретична геодезія рішає задачу геометричним методом (довжини ліній, кути), а теорія фігури Землі—фізичним методом (вимірювання сили тяжіння). Зараз зони взаємозв'язані. Теорія фігури Землі дає форму, а масштаба дати не може. Тут необхідні методи теоретичної геодезії.

Зараз беруть дані супутникових спостережень. Супутник—рухома візирна ціль, яку можна спостерігати з двох вихідних пунктів і другий метод визначень - динамічний. Рух супутника відбувається по законам Ньютона. Сила тяжіння діє на супутник і залежить його рух від гравітаційного поля Землі. Гравітаційне поле Землі, своєю чергу, залежить від розподілення мас в середині Землі. В останій час спостереження ведуться по системі ОРЗ.

Розділ 9.

Лекція № 13. Відхилення прямовисних ліній

13.1. Встановлення нульової системи координат.

1. Система просторових прямокутних координат X, Y, Z .

При встановленні нульової системи координат використовують площину земного екватора і площину початкового астрономічного меридіана в Грінвічі. Площина земного екватора проходить через центр інерції Землі O , перпендикулярно до осі обертання Землі FF_1 . В точці F Грінвіча $8F$ дотична до силових ліній і поверхню паралельну осі обертання Землі. Внаслідок переміщення полюсів ці площини міняють своє положення в тілі Землі.

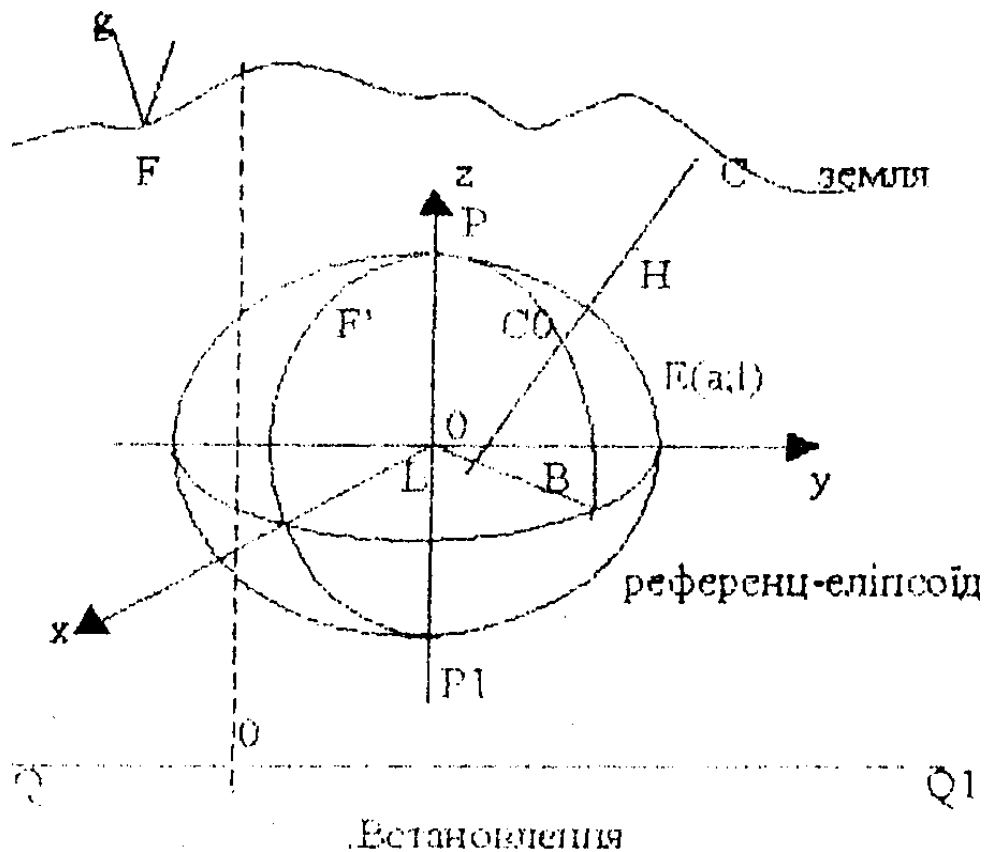


Рис.13.1 Встановлення о-вої система координат.

Тому розглядаємо не міттеву вісь Землі, а деяку середню вісь обертання Землі. Необхідно вводити поправки за приведення до середнього полюса.

Нехай P —середній полюс; QQ_1 —середній екватор. За початок системи просторових прямокутних координат XUZ . приймемо точку O , розташовану поблизу передбачуваного центра інерції Землі. Вісь OZ , направлена паралельно до осі обертання Землі додатньою віссю—на північ. Площина XOY паралельна площині Земною екватора; вісь OX розташована так, щоб вона була паралельна до площини початкового астрономічного меридіана; вісь Y -ків—на 90° на Схід від осі X . Положення точки однозначно визначається прямокутними координатами $X; Y; Z$.

Таким чином, дуже важливо, щоб вісь OZ паралельна до осі обертання Землі, а площина XOZ , була паралельною до початкового астрономічного меридіана,

2. ПРОСТОРОВІ ГЕОДЕЗИЧНІ КООРДИНАТИ

Еліпсоїд бергійня E елементами a і α є або референс-еліпсоїдом або його ще наивають відліковим еліпсоїдом. Центр еліпсоїда E суміщений з точкою O (початок координат X, Y, Z), а його мала вісь OP з віссю OZ . Площина вісь XOZ пересікає еліпсоїд E по кривій PFP_1 , яку розглядають за початковий геодезичний меридіан, який паралельний меридіану Грінвіча.

Геодезичною широтою B точки C називається кут між нормаллю до поверхні еліпсоїда, яка проходить через дану точку і площиною екваторіального

еліпса або площиною земного екватора:

$$B[-90 +90],$$

Широти північніше екватора-додатні, південніше-від'ємні. Геодезичною довготою L в даній точці C називається двохіранний кут між площиною геодезичного меридіана в даній точці і площиною початковою геодезичного меридіана:

$$0^\circ \leq L \leq 360^\circ;$$

На схід від Грінвічського меридіана довготи додатні, на захід—від'ємні. Геодезичні довготи і широти називаються плановими координатами точки C . Геодезичною висотою H в точці C називається відрізок CCO нормалі до референц-еліпсоїда від даної точки до еліпсоїда. H додається, якщо дана точка лежить зовні еліпсоїда.

Таким чином, точка C однозначно визначається координатами .

$$C(B;L;H)$$

Площина геодезичного меридіана проходить через нормаль до еліпсоїда і малу вісь еліпсоїда.

Координатною порерхнею (B, L, H) буде поверхня, для якої:

- 1) висота $H=\text{const}$ паралельна поверхні відлікового еліпсоїда;
- 2) довгота $L=\text{const}$ для всіх точок $L=\text{const}$ площини, яка проходить через малу вісь еліпсоїда;
- 3) широта $B=\text{const}$, для якої кругові конічні поверхні утворюють нормалі до поверхні еліпсоїда.

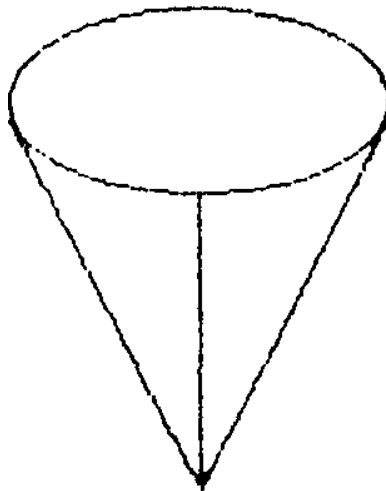


Рис. 13.2. $B=\text{const}$

В цій системі координатними лініями є:
-меридіани, для них $L=\text{const}$ і $H=\text{const}$;

-паралелі, для них $V=\text{const}$ і $H=\text{const}$;

-нормалі до еліпсоїда, для них $V=\text{const}$, $L=\text{const}$, а змінюється лише H .

Геодезичні координати B і L в даній точці можна розглядати як параметри, які визначають нормалі до референц-еліпсоїда відносно площини земного екватора і початкового геодезичного або астрономічного меридіана.

Безпосередньо із вимірів B , L , H не одержують, їх вичисляють.

3. Астрономічні координати φ і λ

Астрономічною широтою φ називається кут між прямовисною лінією і площиною земного екватора.

Астрономічною довготою λ називається двограний кут між площиною астрономічного меридіана даної точки і початкового астрономічного меридіана.

Параметри φ і λ визначають в даній точці прямовисної лінії, але не визначають положення точки, тому що потрібно завжди з цими величинами давати потенціал W сили земного тяжіння в даній точці.

Площина астрономічного меридіана не проходить через вісь обертання Землі.

13.2. Зв'язок просторових координат X, Y, Z і геодезичних B, L, H .

Розглянемо точку CO на поверхні еліпсоїда:

$$C_0(x', y', z');$$

$$C_0 = (B, L);$$

Де радіус кривизни першого вертикалу N :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= N \cos B \cos L; \\ y' &= N \cos B \sin L; \\ z' &= N(1 - e^2) \sin B; \end{aligned} \right\}; \quad (13.1) \quad \left. \begin{aligned} x &= (N + H) \cos B \cos L, \\ y &= (N + H) \cos B \sin L \\ z &= N(1 - e^2) \sin B + H \sin B \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

Для визначення B, L, H по x, y, z використовують метод послідовних наближень.

13.3. Точні формули перетворення геодезичних координат.

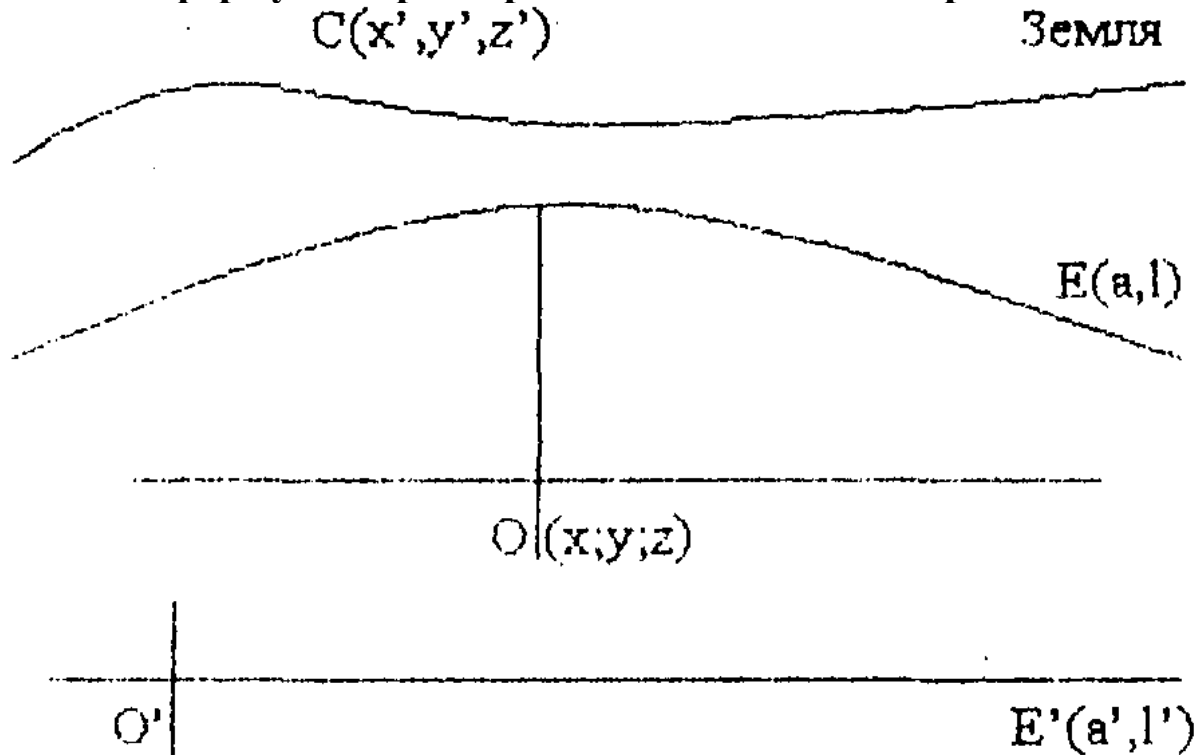


Рис. 13.3. Два відлікові еліпсоїди.

Геодезичні координати B, L, H зв'язані з відліковим еліпсоїдом $E(a, \alpha)$. Нехай центр еліпсоїда знаходиться в точці O . Маємо другу систему координат B', L', H' , віднесених до еліпсоїда E' з елементами (a', α') .

Нехай з еліпсоїдом E зв'язана система координат x, y, z з початком системи координат в точці O .

Нехай з еліпсоїдом E' зв'язана система координат x', y', z' з початком координат в точці O' .

Нехай $x'O, y'O, z'O$ – координати старого початку в новій системі координат точки O відносно O' .

Формули перетворення просторових прямокутних координат, якщо вісі нової і старої систем паралельні:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + x'_0; \\ y' &= y + y'_0; \\ z' &= z + z'_0; \end{aligned} \right\}; \quad (13.3)$$

Залежність між B, L, H і B', L', H' на основі формул (13.2) і (13.3):

$$(N' + H') \cos B' \cos L' = (N + H) \cos B \cos L + x'_0 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (N' + H') \cos B' \cos L' = (N + H) \cos B \cos L + x'_0 \\ \end{aligned}} \right\}; (13.4)$$

$$(N' + H') \cos B' \sin L' = (N + H) \cos B \sin L + y'_0$$

$$N'(1 - e'^2) \sin B' + H' \sin B' = N(1 - e^2) \sin B + H \sin B + z'_0$$

Формули (13.4) і є точними формулами перетворення просторових геодезичних координат.

По відомим $\alpha, B, L, H, x_0, y_0, z_0, a', l', e'$ за формулами (13.4) визначають B', L', H' .

Це точні формули. На практиці використовують наближені формули.

Лекція № 14. Абсолютні і відносні відхилення прямовисних ліній

14.1 Абсолютні і відносні відхилення прямовисних ліній.

Всі геодезичні виміри зв'язані з прямовисними лініями і рівневою поверхнею (не зв'язані тільки вимірювані похили дальності).

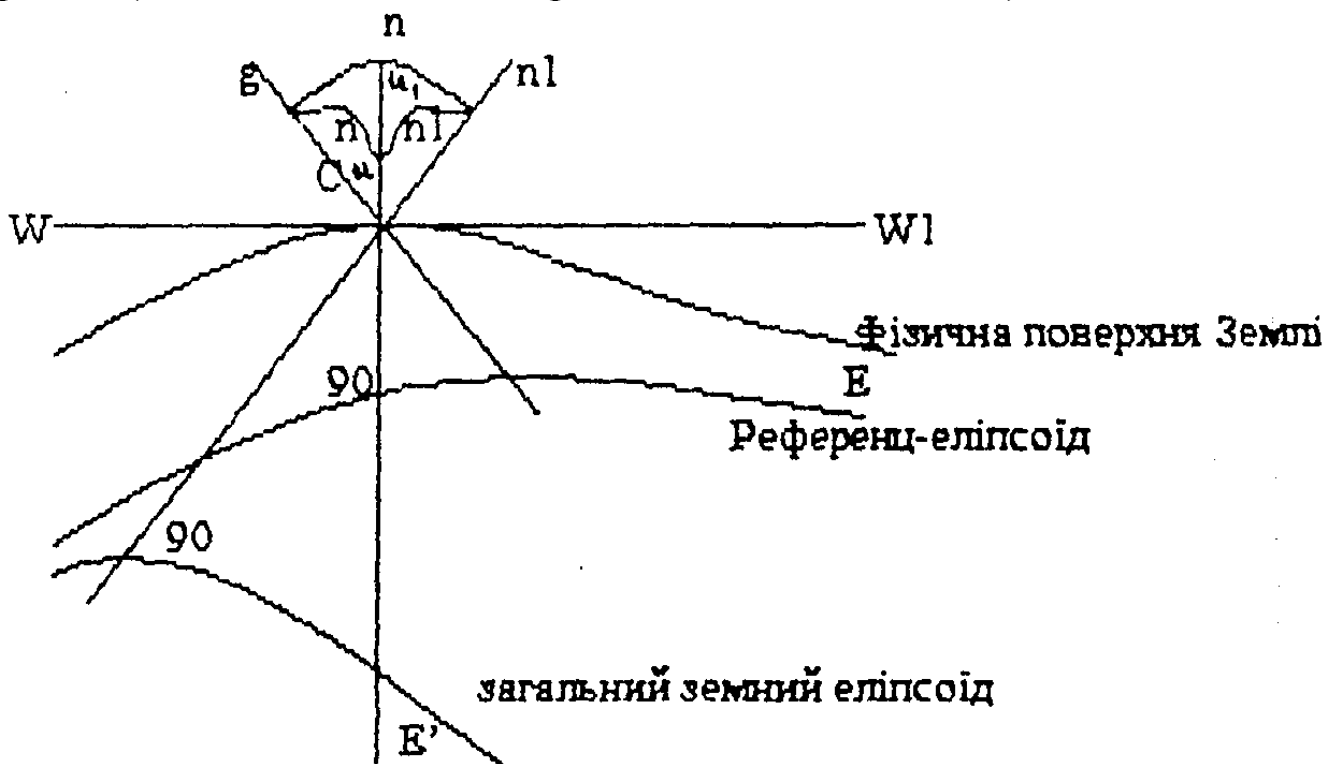


Рис. 14.1. Відхилення виска.

Координати B, L визначають напрямок нормалі до референц – еліпсоїда. Кут u між нормаллю до референц – еліпсоїда і прямовисною лінією називається відхиленням виска. Cg – прямовисна лінія; $WW1$ – рівнева поверхня потенціалу сили тяжіння в точці C . $Cg \perp WW1$. Мала вісь референц – еліпсоїда паралельна вісі обертання Землі.

Нехай pE – нормаль до поверхні референц – еліпсоїда. Нормаль і прямовисна лінія в одній площині не лежать. Кут u між прямовисною лінією в даній точці і нормаллю до прийнятого референц – еліпсоїда називається відносним або астрономо-геодезичним відхиленням виска.

Кут $u1$ між прямовисною лінією і нормаллю до загального земного еліпсоїда називається абсолютним відхиленням виска.

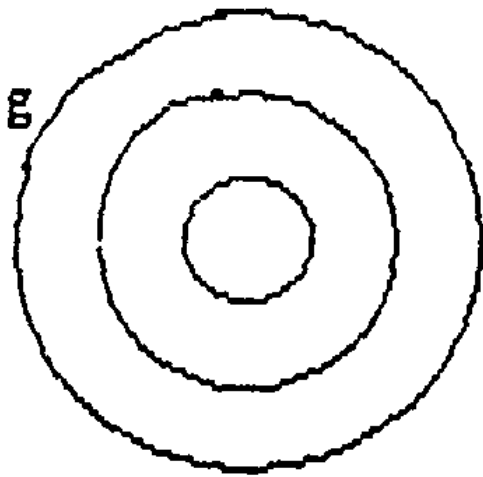


рис. 14.2. Лінії $g=const$

Земля не знаходиться в стані гідростатичної рівноваги і загальний земний еліпсоїд не співпадає з поверхнею Землі. Внутрішні шари Землі близькі до гідростатичної рівноваги і обмежуються поверхнями, близькими до рівневих. Земна кора має невелику по об'єму масу і невелике (150 – 200 м) максимальне відхилення від еліпсоїда, тому $U_{max} = 60''$.

В середньому для всієї Землі $PCR = 3-4''$. Відносне (астрономо-геодезичне) відхилення виска залежить ще й від того як розташований референц-еліпсоїд і як добре вибрані його параметри.

Геофізикам необхідні абсолютні відхилення виска.

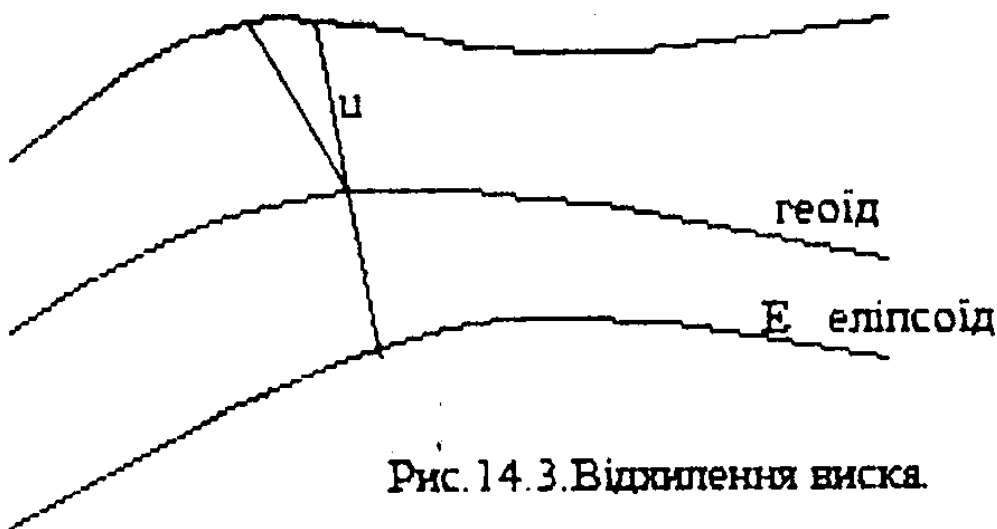


Рис. 14.3. Відхилення виска.

14.2. Параметри геодезичної координатної системи. Умови в вихідному пункті.

Землю можна розглядати як тверде тіло. Тверде тіло має шість ступенів свободи. Щоб визначити геодезичну координатну систему, скріпити її з Землею необхідно вісім параметрів-шість параметрів, тому що тверде тіло має шість ступенів свободи і, крім того, необхідно знати ще два параметри a і α .

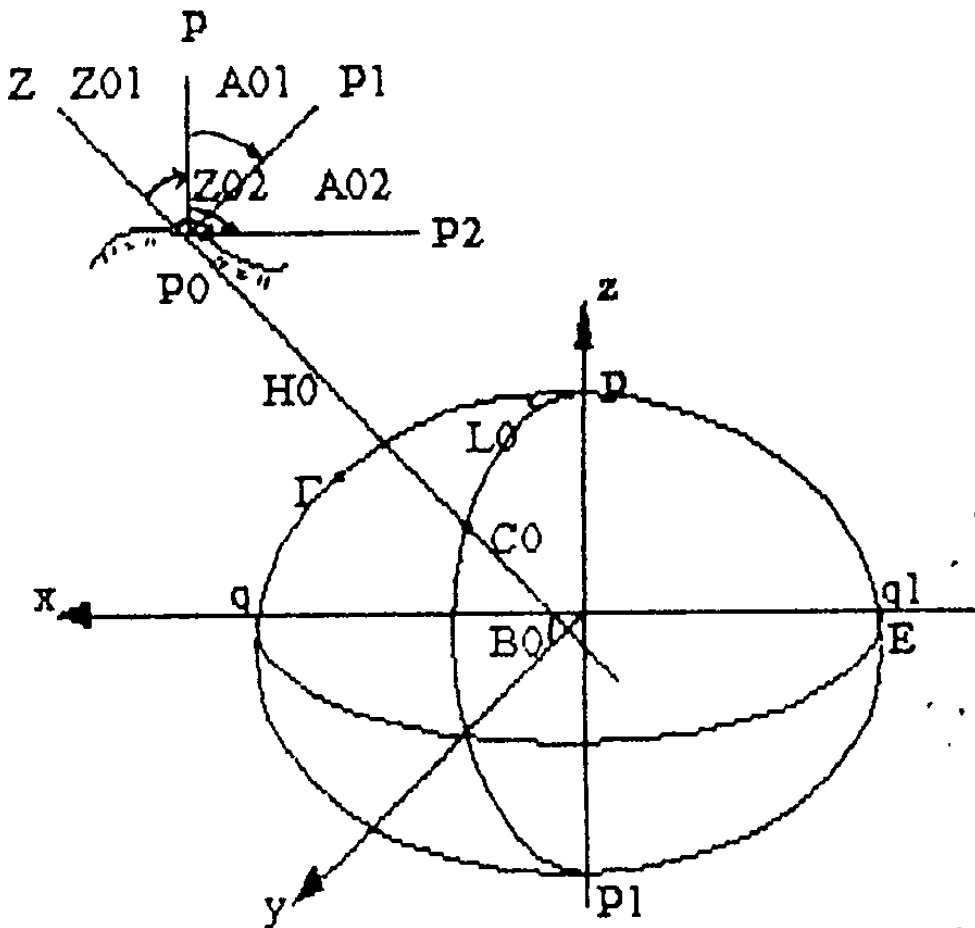


Рис 14.4

Нехай P_0 -точка на земній поверхні-вихідний пункт державної триангуляції, P_0P_1 -жорстко зв'язаний з Землею напрямком; P_0P_2 -другий напрямком жорстко зв'язаний з Землею.

Вибираємо референц-еліпсоїд E , задаючись параметрами a і α . Довільно припишемо точці P_0 координати B_0, L_0, H_0 .

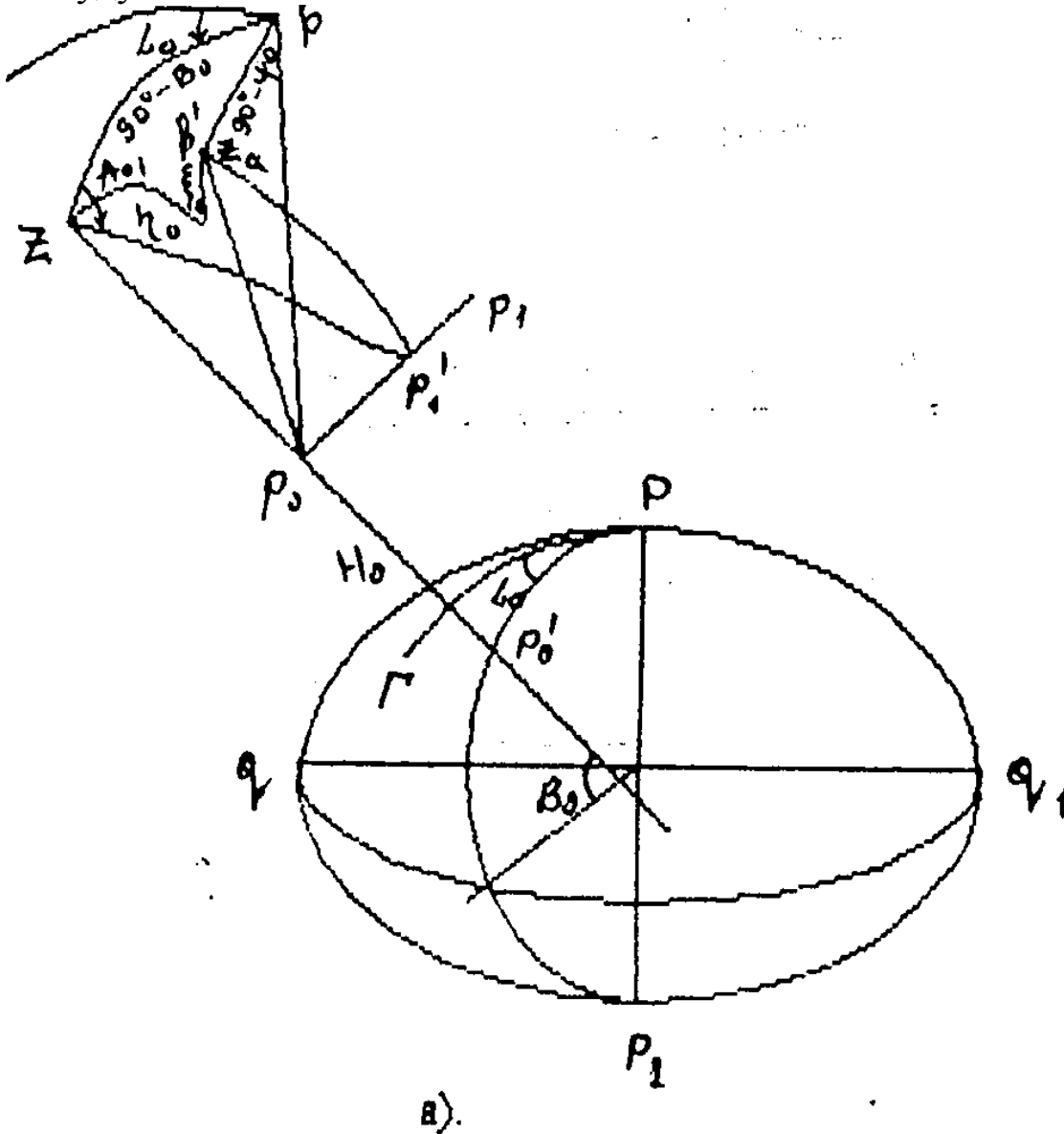
На прийнятому еліпсоїді довільний меридіан приймемо за початковий $РГР_1$, від точки C_0 відкладемо H_0 , одержимо точку P_0 .

Якщо поєднати точку P_0 з точкою P_0 , то на земній поверхні залишаються тільки три ступені свободи-точка може обертатися навколо точки P_0 , але поступального руху вона немає.

Необхідно задати ще три параметри. Довільно задамо для P_0 значення геодезичного азимуту A_{01} і геодезичної зенітної віддалі напрямку P_0P_1 . Геодезична зенітна віддаль Z -це кут між нормаллю до референц-еліпсоїда і даним напрямком. A_{01} -геодезичний азимут між напрямком початкового меридіану P_0P і напрямком P_0P_1 , який проходить на дану точку P_1 . Залишився один ступінь свободи обертання референц-еліпсоїда з нормаллю відносно напрямку P_0P_1 . Для P_0 задамо значення геодезичного азимуту A_{02} .

Таким чином, нами задані вісім параметрів $a, \alpha, B_0, L_0, H_0, A_{01}, Z_{01}, A_{02}$. При довільному виборі цих параметрів ми не можемо сказати, як розташована

площина екватора референц-еліпсоїда відносно земного еліпсоїда і астрономічного меридіана. В геодезичній практиці прийнято геодезичну координатну систему орієнтувати так, щоб площина екватора референц-еліпсоїда була паралельна екватору, а площина початкового геодезичного меридіана була паралельна площині астрономічного меридіана в Грінвічі. Тоді три параметри вже не можуть бути задані довільно. У вихідному пункті необхідно виконати астрономічні визначення $\varphi, \theta', \lambda, \theta, A_0$ і три параметри з шести будуть зв'язані.



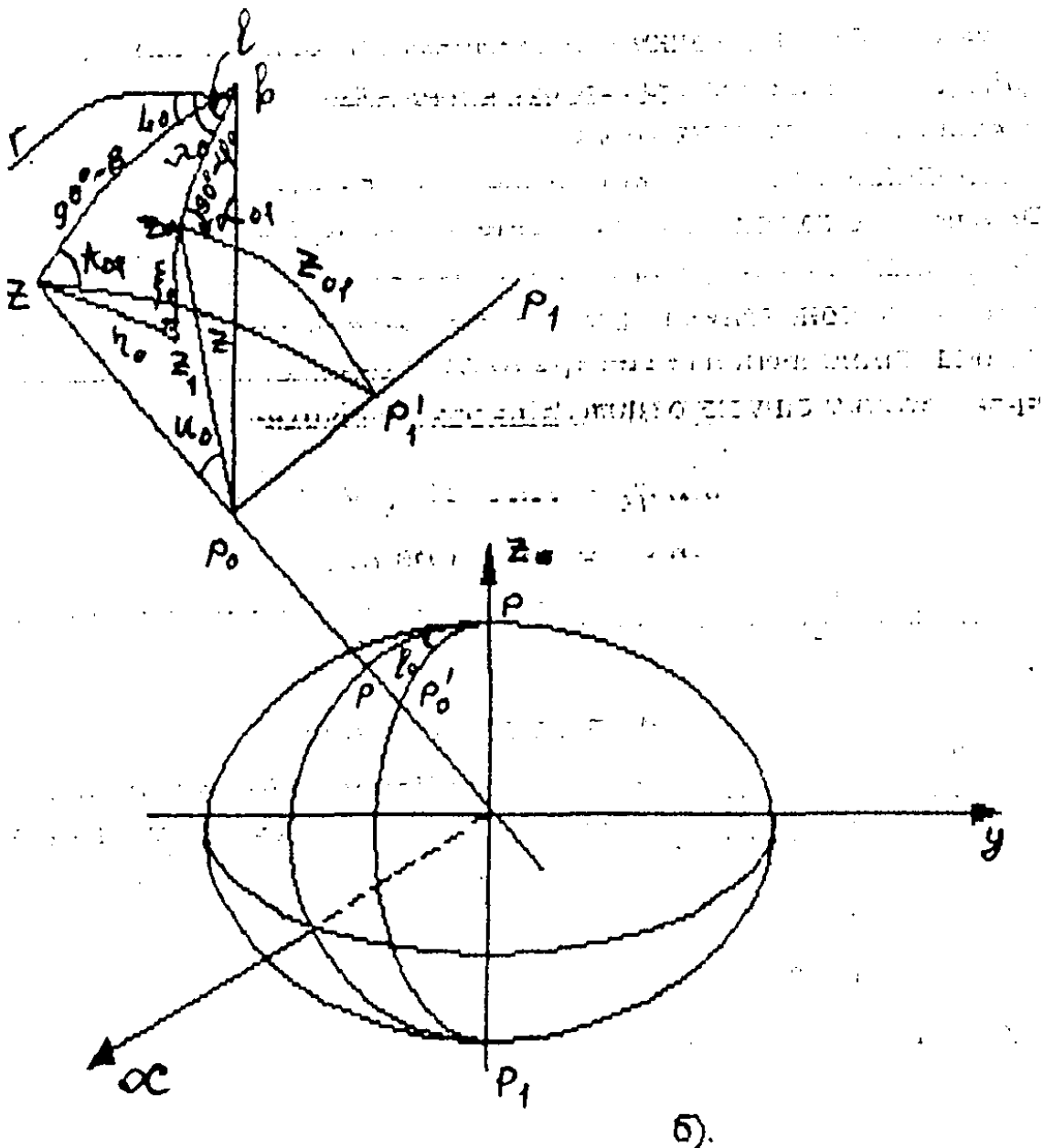


Рис 14.4 Умова в вихідному пункті

В точці P_0 будемо допоміжну сферу одиничного радіуса. Нехай P_0Z_0 – прямовисна лінія в даній точці. Перетинанням прямовисної лінії з допоміжною сферою є точка Z_0 (астрономічний зеніт). Нехай P_1 – перетинання напрямку P_0P_1 з допоміжною одиничною сферою, тоді Z_0P_1 буде астрономічною зенітною віддаллю. Ця зенітна віддаль вимірюється кутомірним приладом. Визначають φ_0 , λ_0 , A_0P_1 . Припускають, що астрономічні дані завжди приведені до середнього полюсу.

Визначення астрономічного азимуту A_0P_1 дозволить побудувати в даній точці площину астрономічного меридіана. Астрономічна широта φ дає можливість побудувати пряму r_0r , паралельну вісі обертання Землі. Відкладаючи дугу $90 - \varphi_0$, одержимо точку r' , яку з'єднаємо з r_0 . Визначення λ_0 дає можливість побудувати в точці r_0 площину, паралельну площині

астрономічного меридіану в Гринвічі (Р0р паралельна астрономічному меридіану).

На практиці діють таким чином:

1. Вибирають референц-еліпсоїд Е з параметрами а і α.
2. Задають довільно величини ξ0 (астрономічного меридіану) і η0 (першого вертикалу) складові відносного відхилення виска u0 відповідно в площині астрономічного меридіану ξ0 і астрономічного вертикалу η0.

Якщо задали ξ0 і η0, тому можемо провести в даній точці нормаль до поверхні референц-еліпсоїда. Перетин нормалі з допоміжною сферою дає точку геодезичного зеніта Z.

Вважаємо ξ0 та η0 малими величинами, тому їх квадратами і добутками можемо знехтувати. Дуга ZP'1 буде геодезичною зенітною віддаллю.

Підбираючи значення геодезичної широти B0 в даній точці, розташуємо референц-еліпсоїд так, щоб його мала вісь PP1 була паралельна PP0.

Розглянемо сферичний трикутник ZZφ'p. Кут при вершині p позначимо l. Дуга Zp = 90 – B0, якщо вісь обертання PP1 буде паралельна PP0. Розглянемо три елементи цього трикутника: η0, l, 90 – B0. Для прямокутного сферичного трикутника згідно аналогії Непера-Модюї косинус окремо лежачого елемента дорівнює добутку синусів поруч лежачих елементів:

$$\sin \eta_0 = \sin l \cdot \sin (90^\circ - B_0)$$

$$\sin \eta_0 = \sin l \cdot \cos B_0,$$

Величина η0 мала, тому l порядку η0, але тільки в широтах, неблизьких до полюса.

$$\eta_0 = l \cos B_0, \quad (14.1)$$

З цього ж трикутника за правилом Непера-Модюї: косинус середнього елемента дорівнює добутку котангенсів крайніх, суміжних з ним елементів:

$$\cos l = \operatorname{ctg} (90^\circ - B_0) \cdot \operatorname{tg} (90^\circ - \varphi_0 + \xi_0)$$

$$\cos l = \operatorname{tg} B_0 \cdot \operatorname{ctg}(\varphi_0 - \xi_0).$$

Розкладаючи косинус в ряд і, обмежуючись першим членом, $\cos l = 1$:

$$\operatorname{tg} B_0 = \operatorname{tg}(\varphi_0 - \xi_0),$$

$$B_0 = \varphi_0 - \xi_0, \quad (14.2)$$

φ0 відомо з астрономічних спостережень і задано ξ0. Формула (14.2) справедлива, якщо мала вісь еліпсоїда паралельна до осі обертання Землі. З (14.2)

$$B_0 \approx \varphi_0; \quad i$$

$$\eta_0 = l \cos \varphi_0; \quad (14.3)$$

приймемо до уваги, що:

$$l = \lambda_0 - L_0;$$

$$\eta_0 = (\lambda_0 - L_0) \cos \varphi_0; \quad (14.4)$$

$$\frac{\theta + \theta_1}{2} = \theta$$

З врахуванням формули:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \frac{\theta_1 - \theta}{2} = \frac{1}{2} (\theta_1 - \theta)$$

$$\sin \theta (\theta_1 - \theta) = l \sin \theta \cdot \sin \varphi_0$$

Із врахуванням (14.4)

$$\theta - \theta_1 = -l \sin \varphi_0 = -(\lambda_0 - L_0) \sin \varphi_0 = -\eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0;$$

Таким чином

$$\theta - \theta_1 = -(\lambda_0 - L_0) \sin \varphi_0 = -\eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0; \quad (15.1)$$

Із сферичного трикутника ZZap'1 таким же шляхом знайдемо:

$$R - R_1 = -q \cos Z_{01}; \quad (15.2)$$

де Z_0 – астрономічна зенітна віддаль на спостерігаємий предмет.

По теоремі синусів

$$\sin q \sin Z_{01} = \sin u_0 \sin R$$

$$\sin q = \frac{\sin u_0 \sin R}{\sin Z_{01}}$$

В триангуляції зенітні віддалі близькі до 90° , q такого ж порядку, як і $R - R_1$:

$$q = u_0 \frac{\sin R}{\sin Z_{01}} = u_0 \frac{\sin R_{01}}{\sin Z_{01}} \quad (15.3)$$

$$R - R_1 = -u_0 \cdot \sin R_1 \cdot \operatorname{ctg} Z_{01}$$

$$R - R_1 = -u_0 \cdot \sin(\alpha_{01} - \theta_1) \cdot \operatorname{ctg} Z_{01}$$

$$R - R_1 = (u_0 \cdot \sin \theta_1 \cdot \cos \alpha_{01} - u_0 \sin \alpha_{01} \cdot \cos \theta_1) \cdot \operatorname{ctg} Z_{01}$$

Із трикутника ZZaZ1:

$$\xi_0 = u_0 \cos \theta_1; \quad (15.4)$$

$$\eta_0 = u_0 \sin \theta_1; \quad (15.5)$$

Тоді:

$$R - R_1 = (\eta_0 \cdot \cos \alpha_{01} - \xi_0 \sin \alpha_{01}) \cdot \operatorname{ctg} Z_{01}$$

$$A_{01} = \alpha_{01} - \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0 + (\eta_0 \cdot \cos \alpha_{01} - \xi_0 \sin \alpha_{01}) \cdot \operatorname{ctg} Z_{01} \quad (15.6)$$

Всі величини в правій частині формули (15.6) відомі. Формула (15.6) встановлює геодезичний азимут нормальної площини, в якій знаходиться спостерігає мий предмет, якщо мала вісь паралельна вісі обертання Землі.

Таким чином, задаючись елементами еліпсоїда a і α , величинами ξ_0 і η_0 і, визначивши B_0, L_0 за формулами:

$$B_0 = \varphi_0 - \xi_0; (15.7)$$

$$L_0 = \lambda_0 - \eta_0 \cdot \sec \varphi_0; (15.8)$$

І A_0 за формулою (15.6), розташуємо малу вісь референц-еліпсоїда паралельно до осі обертання Землі і площину початкового геодезичного меридіана паралельно площині початкового астрономічного меридіана, томі що лише при цьому справедливі формули (15.6), (15.7) і (15.8) одержуємо початкову умову. При цьому геодезична висота H_0 залишається до довільною. Введення декартової системи $XOYZ$ може бути визначене малими кутами повороту E_x, E_y, E_z . Кутом повороту відносно осі $x \in E_x \dots$ В нашому випадку, згідно наших умов $E_x=0, E_y=0, E_z=0$. Таким чином, за вихідні параметри можна прийняти: $a; \alpha; \xi_0; \eta_0; H_0; E_x=0, E_y=0, E_z=0$.

Як незалежні параметри координатної системи можна розглядати B_0 і L_0 , а не ξ_0 і η_0 , тоді

$$\xi_0 = \varphi_0 - B_0; (15.9)$$

$$\eta_0 = [\lambda_0 - L_0] \cdot \cos \varphi_0; (15.10)$$

B_0, L_0, H_0 є геодезичними координатами вихідного пункту триангуляції і разом з A_0 – геодезичним азимутом називаються вихідними геодезичними датами.

В простішому випадку вихідні геодезичні дати встановлюються так: приймають $\eta_0=0, \xi_0=0$ в вихідному пункті, визначають $\varphi_0, \lambda_0, \alpha_0$ і приймають $B_0 = \varphi_0; L_0 = \lambda_0; A_0 = \alpha_0$. H_0 є довільним. Це і є орієнтуванням по астрономічним даним в вихідному пункті.

15.5 Зв'язок між астрономічними і геодезичними широтами, довготами і азимутами, відхилення виска.

Якщо виконуються умови орієнтування референц-еліпсоїда в тілі Землі, то на кожному триангуляційному пункті повинно:

$$\varphi - B = \xi;$$

$$\lambda - L = \eta \cdot \sec \varphi;$$

$$A = \alpha - \eta \cdot \operatorname{tg} \varphi + (\eta \cdot \cos \alpha - \xi \cdot \sin \alpha) \cdot \operatorname{ctg} Z;$$

де φ, λ, α - астрономічні координати і азимуту спостереження;

B, L – геодезичні координати визначені;

A – геодезичний азимут напрямку.

З (15.11) виходить, що, якщо відомі B і L пункту, а з астрономічних спостережень отримують φ і λ , то для нього визначають складові ξ і η :

$$\begin{aligned}\xi &= \varphi - B; \\ \eta &= (\lambda - L) \cos \varphi\end{aligned}\quad (15.12)$$

Тому і називають астрономо-геодезичним відхиленням виска.

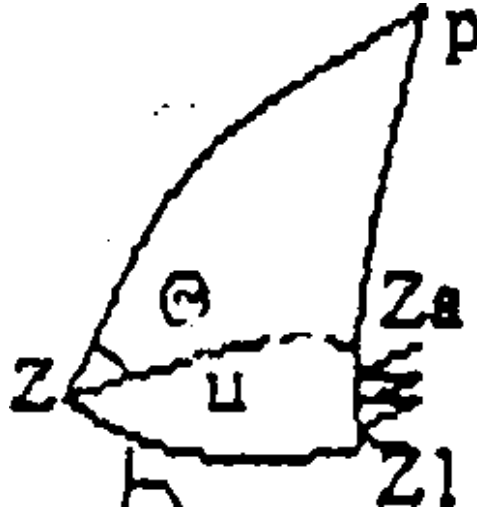


Рис 15.2 Паралактичний трикутник

p – полюс світу на кулі одиничного радіуса, Z_a – астрономічний зеніт, θ – геодезичний азимут площини, в якій проходить відхилення виска.

З прямокутного трикутника ZZ_aZ_1 , який можна розглядати як плоский:

$$\begin{aligned}tg(90^\circ - \theta) &= \frac{\xi}{\eta} \\ tg\theta &= \frac{\xi}{\eta} = \frac{(\lambda - L) \cos \varphi}{\varphi - \beta};\end{aligned}\quad (15.13)$$

За формулою (15.13) знаходять азимут площини, в якій знаходиться відхилення виска.

$$u = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{(\varphi - B)^2 + (\lambda - L)^2 \cos^2 \varphi};\quad (15.14)$$

За формулою (15.14) знаходять відхилення виска u .

15.3. Залежність між астрономічною і геодезичною зенітною віддаллю.

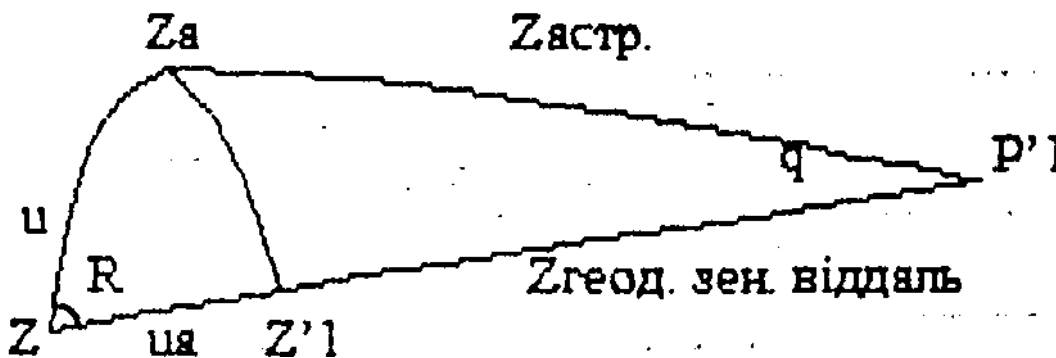


Рис 15.3 Трикутник на допоміжній одиничній сфері навколо пункта

Візьмемо до уваги, що q – величина мала, а зенітні віддалі Z близькі до 90° .

$$\cup Z_0 P'_1 = \cup Z'_1 P'_1$$

$$Z = z_0 + u_0 = Z + u \cdot \cos R = Z + u \cdot \cos(A - \theta)$$

$$Z \cong Z + u \cdot \cos(\alpha - \theta) = z + u \cdot \cos \theta_0 \cos \alpha + u \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \alpha$$

$$Z = z + \xi \cdot \cos \alpha + \eta \cdot \sin \alpha = z + \xi \cdot \cos A + \eta \cdot \sin A$$

$$u_0 = \xi \cdot \cos A + \eta \cdot \sin A; (15.16)$$

Так знаходять складові відхилення виска в площині, в якій лежить азимут A . На підставі формули (15.16):

$$A = \alpha - (\lambda - L) \sin \varphi + (\eta \cdot \cos \alpha - \xi \cdot \sin \alpha) \cdot \operatorname{ctg} Z,$$

другий член якої справа – величина постійна для даного пункту, а останній член змінюється від напрямку, оскільки компонентами є косинуси і синуси азимутів. Це і є поправкою у визначені напрямки відхилення прямокутних ліній.

$$\delta_1 = - (\xi \cdot \sin \alpha - \eta \cdot \cos \alpha) \cdot \operatorname{ctg} Z = - (\xi \cdot \sin A - \eta \cdot \cos A) \cdot \operatorname{ctg} Z; (15.17)$$

У формулі (15.17) замість астрономічної зенітної віддалі Z можна поставити геодезичну зенітну віддаль Z .

δ_1 – зміна виміряного напрямку відповідно ухилу вертикальної осі приладу на кут u . Вводячи цю поправку, ми ніби сполучаємо прямокутну лінію приладу з нормаллю.

В середньому, для всієї Землі складові відхилення виска ξ і η дорівнюють $\pm 3''$ і в гірській місцевості $1'$.



Рис 15.4 Геометричний зміст поправки

$$Z \approx 90^\circ; \operatorname{ctg} Z \approx \frac{1}{150} - \frac{1}{200}; \delta_1 \approx 4'' : 200 = 0.02''$$

ξ і η змінюються систематично від пункту до пункту, В гірських районах $\delta_1 = 0,1$. Великі відхилення виска складають $10''$ і зенітні віддалі $92^\circ - 95^\circ$. В гірських районах цю поправку враховують і в триангуляції 2 класу.

Припустимо, що в астрономічні азимуты введені дві поправки: δ_2 – поправку на висоту спостерегаємого пункту над референц-еліпсоїдом і δ_3 – поправку на перехід від нормального перетину до геодезичної лінії.

Крім того, припустимо, що останній член формули (15.17) обчислений і його значення введено в астрономічний азимут.

Тоді, геодезичний азимут в лівій частині формули (15.17) буде являти собою геодезичний азимут геодезичної лінії на поверхні еліпсоїда, з'єднуючий проєкції пунктів. Азимут геодезичної лінії β .

Астрономічний азимут α . H_1 – геодезичні висоти. Після введення поправок δ_2 і δ_3 отримаємо азимут геодезичний A . $P_1 P_2$ паралельна вісі обертання Землі.

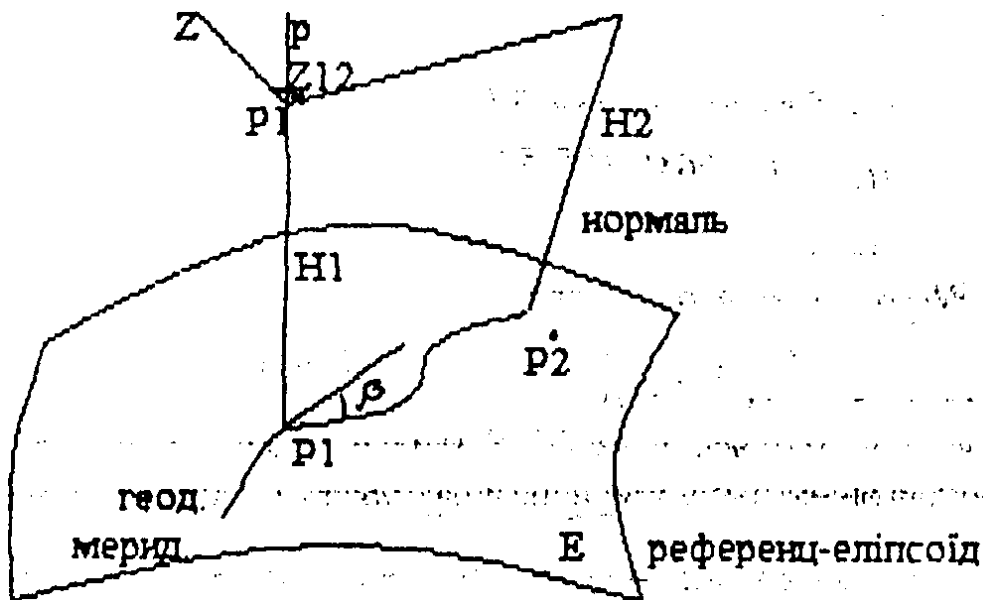


Рис 15.4.1 Геодезична лінія $P_1 P_2$ на еліпсоїді

$$A = \alpha - (\lambda - L) \cdot \sin \varphi; \quad (15.18)$$

Формула (15.18) називається рівнянням Лапласа. Геодезичний азимут, який розраховується за рівнянням Лапласа називається азимутом Лапласа. Для визначення азимута Лапласа на триангуляційному пункті необхідно одержати з спостережень α і λ . Широту φ можна не визначати, її можна замінити B в (15.18).

Виконувались на кожних двох пунктах вихідні сторони базисної мережі або на кожних двох пунктах базисної сторони (тобто, в місцях перетинання рядів триангуляції 1 класу).

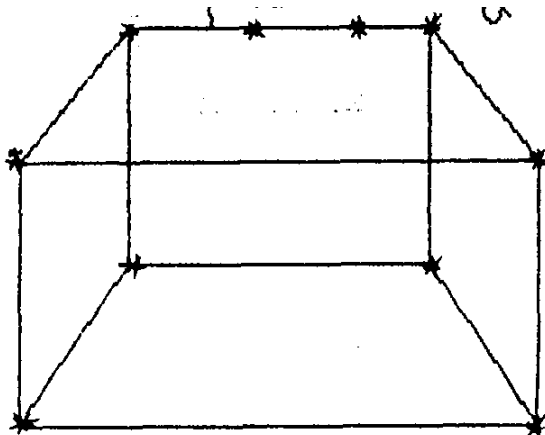


Рис. 15.5. Спостереження азимутів Лапласа.

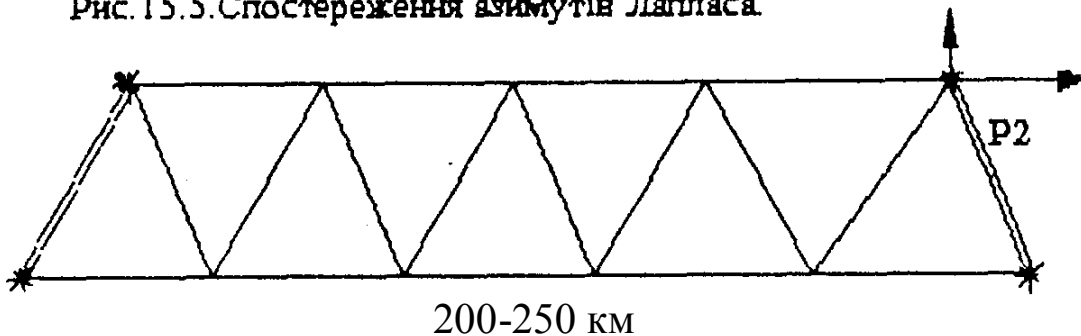


Рис 15.6 Повздовжній і поперечний зсув

На деяких проміжних пунктах в ланці спостерігались λ і φ через 60 – 70 км. Середня квадратична похибка визначення пункту Лапласа:

$$m_{\text{лапласа}} = f(m_{\alpha}; m_{\lambda}; m_{\beta});$$

Похибкою геодезичної довготи можна знехтувати.

Повздовжній і поперечний зсуви 1 класу складають порядку $\pm 0,6$ м.

Нехай, ряд розташований вздовж паралелі, тоді похибка геодезичної довготи пункту P2:

$$m = \frac{0.6}{30} \sec \varphi'' \approx 0.02'';$$

А одна секунда дуги на еліпсоїді приблизно дорівнює 30 метрів.

Астрономічні обчислення на пункті 1 класу виконують з точністю:

$$m_{\alpha} \leq \pm 0,5''; \quad m_{\beta} \leq \pm 0,45''; \quad m_{\lambda} - \text{можна знехтувати}$$

Практично, похибка азимута Лапласа залежить від m_{α} і m_{β} .

Можна вважати, що:

$$m_{\alpha} = \pm \sqrt{m_{\alpha}^2 + m_{\beta}^2} \sin \varphi; \quad (15.19)$$

В середніх широтах $m_{\alpha} = \pm 0,7''$.

Астрономічні визначення азимута і довгот на різних пунктах між собою незалежні. Тому, азимути Лапласа можна розглядати як незалежні величини.

Властивість практичної незалежності Лапласовських азимутів від похибок геодезичних вимірів обумовило їх виключно важливу роль в розвитку триангуляції. Одержані по рядах триангуляції через визначену кількість

трикутників Лапласові азимуту : 1) забезпечують виконання орієнтування всіх ланок і рядів тріангуляції з похибкою одного порядку; 2) не допускають поширення і накопичення систематичних похибок; 3) дозволяють вводити при врівноваженні азимутальні умовні рівняння, які підвищують точність всіх елементів тріангуляції; 4) дають можливість здійснювати надійний контроль кутових вимірів.

Лекція № 16. Редукційна проблема.

16.1. Постановка проблеми.

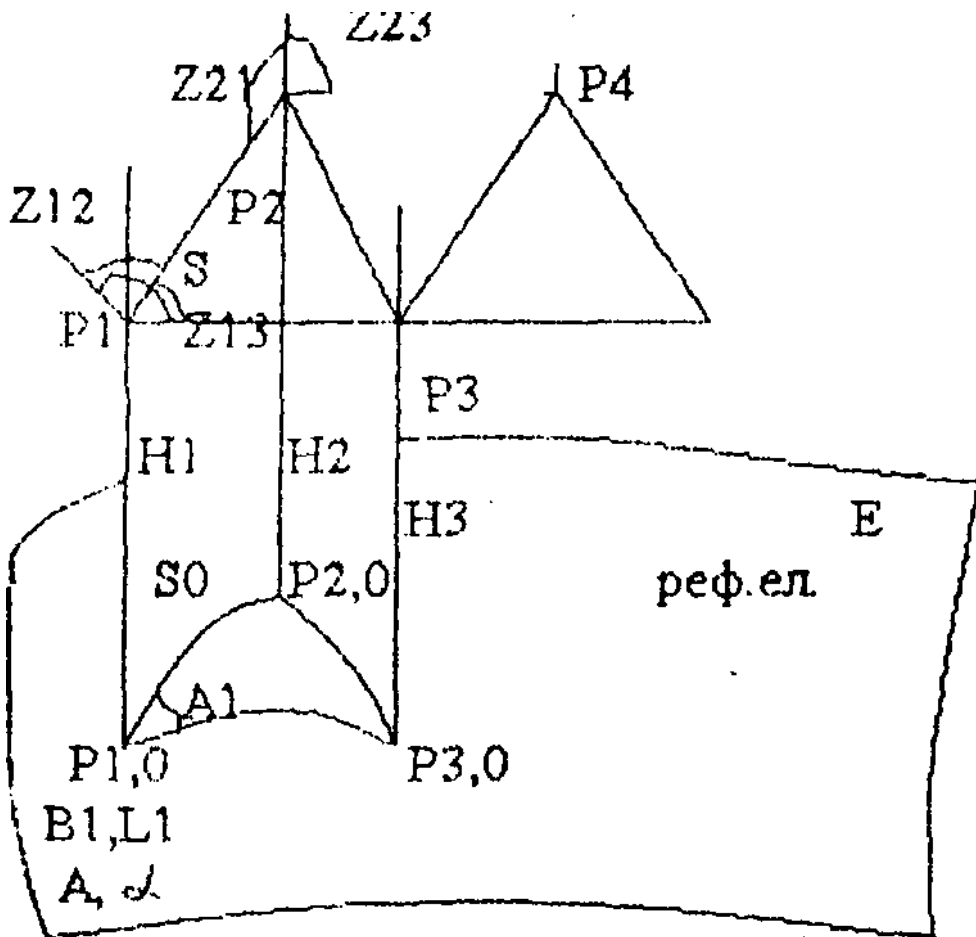


Рис 16.1 Редукування тріангуляції

На поверхні Землі маємо ряд тріангуляційних пунктів $P_1, P_2, P_3 \dots$. На рис. 16.1 центри знаків з'єднані прямими в вершинах трикутників. Показані також напрямки прямої висної лінії (вертикальної осі кутомірної прилади). Ці напрямки фіксуються реально за допомогою рівня. При проектуванні на референс-еліпсоїді утворюється фігура поліедр. Якщо в вершинах його виміряти зенітні віддалі і горизонтальні кути, то поліедр був би однозначно визначеним.

Необхідно ввести систему координат і визначити координати пункту P_1 , прийнявши його за вихідний, виконати астрономічні визначення і виконати орієнтування в геодезичній координатній системі. Визначивши B, L і H всіх

триангуляційних пунктів, ми б визначили напрямки прямовисних ліній. Але зенітні віддалі сильно спотворюються вертикальною рефракцією, а методів точного обчислення ще не існує. Геодезичні координати B , L і висоти H почали визначати окремо.

Практично, проектують триангуляційні пункти по нормалі на поверхню референц-еліпсоїда і їх з'єднують геодезичними лініями. Ці проекції на поверхні референц-еліпсоїда утворюють мережу сфероїдальних трикутників. Обчислення B , L виконують на поверхні прийнятого референц-еліпсоїда. P_1 і $P_{1,0}$ мають однакові координати. Необхідно вміти переходити від кута A на площині до кута A_1 на еліпсоїді, від сторони S до SO . В зв'язку з роздільним визначенням B , L і H виникає редуційна проблема.

Для визначення висоти H використовують планові координати і проводять геометричне нівелювання, вимірюють силу тяжіння і застосовують метод астрономо-гравіметричного нівелювання.

16.2. Редукування виміряних напрямків на поверхню референц-еліпсоїда.

В кожний напрямок, проведений до центрів знаків повинні бути введені такі поправки:

1. поправка за ухил прямовисної лінії:

$$\delta_{10} = -(\xi_i \sin A_{12} - \eta_i \cos A_{12}) \operatorname{ctg} Z_{12}; (16.1)$$

2. поправка за висоту візирної цілі при редукуванні на поверхню референц-еліпсоїда:

$$\delta_2 = H_2 [1]_2 \frac{l^2}{2} \sin 2A_m \cos^2 B_2; (16.3)$$

3. поправка за перехід від прямого нормального перетину до геодезичної лінії:

$$\delta_3 = -\frac{l^2}{12\rho''} S_{12}^2 [2]_m^2 \sin 2A_m \cos^2 B_m$$

Індекс 1 означає точку стояння приладу, 2 – спостерігає мий пункт.

$$A_m = \frac{1}{2}(A_{12} + A_{21} \pm 180);$$

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$$

У формулі (16.1) астрономічні зенітні віддалі:

$$\operatorname{ctg} Z_{12} = \frac{H_2 - H_1}{S_{12}} - \frac{S_{12}}{2R} + \frac{V_2 - l_1}{S_{12}}; (16.4)$$

де H_1 і H_2 - висоти пунктів над рівнем моря;

На земній поверхні А і В прилад знаходиться в пункті А, а в пункті В – візирна вісь. $A_n a$ – нормаль до поверхні референц-еліпсоїда, $B_n b$ – нормаль через точку В, штриховою лінією $a p' b$ показана геодезична лінія.

Вводячи поправку δ_1 , ми ніби нахиляємо прилад, поєднуючи його вертикальну вісь з нормаллю до поверхні еліпсоїда на кут u .

Після введення поправки δ_1 візирна площина буде сполучена з площиною $A p' B$. Ця нормальна площина дасть в перетинанні $a v'$ - напрямок прямого нормального перерізу. Вводячи у виміряний напрямок поправку δ_2 , ми від напрямку $a v'$ переходимо до напрямку $a v$, але нам потрібно мати напрямок геодезичної лінії. Вводячи поправку δ_3 , переходимо до геодезичної лінії $a a' b$.

Розглянуті поправки враховуються при обробці триангуляції 1 класу і в деяких випадках (гірські райони) в триангуляції 2 класу.

16.3. Редукування базисів на поверхню референц-еліпсоїда.

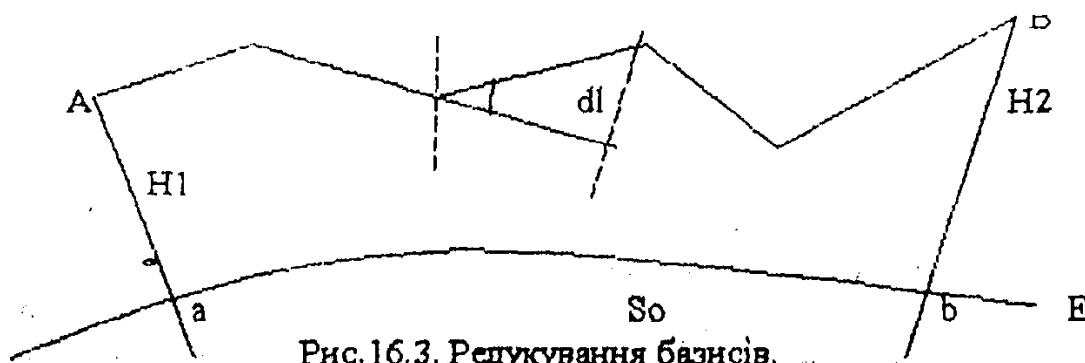


Рис. 16.3. Редукування базисів.

За допомогою інварних дротин виміряють невеликі похилі базиси. dS – елемент базису, що дорівнює довжині мірного приладу (24 м). А і В – кінцеві точки базису на Землі. Кожний з елементів dS приводиться до горизонту.

$$\left. \begin{aligned} dl &= dS \cos \alpha \\ l &= \sum_A^B dS \cos \alpha \end{aligned} \right\}; \quad (16.6)$$

Редукування базису на референц-еліпсоїді виконуємо нормаллями. S_0 – довжина геодезичної лінії між точками а і в. Необхідно від l перейти до S_0 . Цей перехід і називається редукуванням базису на референц-еліпсоїд.

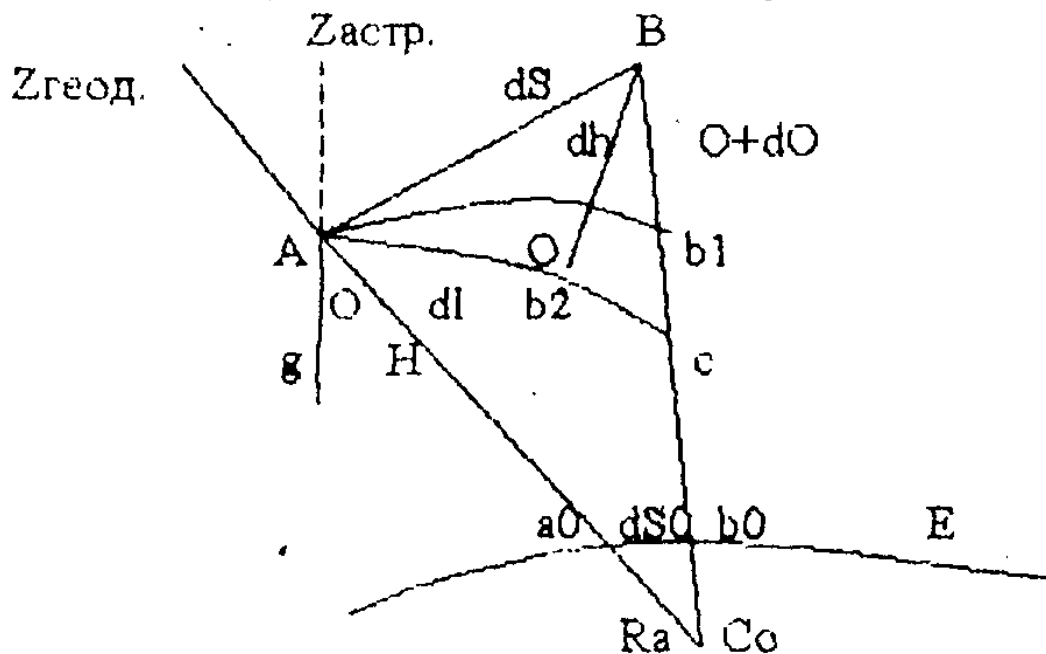


Рис. 16.4. Геометрична інтерпретація редукування базисів.

A і B близькі і ми можемо вважати, що вони перетинаються в одній точці. a_0 і b_0 – проєкції A і B на референц-еліпсоїд. Площина AcB нормальна до точки A. Азимутальна площина ACB дорівнює азимуту базису A. Ag , Bb є ортогональними проєкціями прямовисних ліній на площину малюнка. Ac – перетинання площини малюнка рівневою поверхнею, яка проходить через точку A. Bb_2 перпендикулярне AC ; Ab_1 паралельна a_0b_0 . θ – складає відносне відхилення виска точки A до нормальної площини ACB .

$$\theta = \xi \cos A + \eta \sin A: (16.7)$$

Кут в $1Ac + \theta$, тому що Ab_1 ортогональна нормалі в точці A, Ac ортогональна прямовисній лінії. В нашому випадку θ більше 0. $\theta + d\theta$ – ухил виска в точці B. $d\theta$ – зміна ухилу виска; dS_0 – довжина дуги нормального перерізу a_0b_0 . Висота точки A над референц-еліпсоїдом $H = Aa_0$. Дуга a_0b_0 є дугою кола, описаного радіусом R_a – радіусом кривизни нормального перерізу в точці a_0 . Цей нормальний переріз має азимут A. Знайдемо зв'язок між dS і dS_0 :

$$dl - \cup Ab_2 = dS \cos \alpha$$

де α - кут нахилу елемента dS до горизонту в точці A.

З рис. 16.4:

$$\cup Ac = \cup Ab_2 + \cup b_2c = dl + (\theta + d\theta)dh_w$$

$$dh_w = Bb_2$$

- елементарне нівелірне перевищення між точками B і A.

Кут $\theta + d\theta$ малий і дуга в $2c$ як дуга кола дорівнює добутку радіуса на центральний кут. Будемо нехтувати членами, які дають відносну похибку 1: 10000000

$$\cup Ac = dl + \theta dh_w$$

Величиною θdh_w нехтуємо. $AB = 24$ м – мала величина.

$$\cup Ab_1 = \cup ac \cos \theta = \cup Ac;$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta'^2}{2\rho'^2} + \dots;$$

Величиною $\theta/2\rho$ нехтуємо. Ab_1 і a_0b_0 можна розглядати як дуги кола з радіусами $R_A + H$ і R_A

$$\frac{dS_0}{\cup Ab_1} = \frac{R_A}{R_A + H} = \left(1 + \frac{H}{R_A}\right)^{-1}$$

$$dS_0 = \left(1 + \frac{H}{R_A}\right)^{-1} (dl + \theta dh_w)$$

Розкладаючи в ряд і нехтуючи третім членом розкладу, одержимо:

$$\left(1 + \frac{H}{R_A}\right)^{-1} = 1 - \frac{H}{R_A} + \frac{H^2}{R_A^2} - \frac{H^3}{R_A^3} + \dots;$$

$$dS_0 = \left(1 - \frac{H}{R_A} + \frac{H^2}{R_A^2}\right)^{-1} (dl + \theta dh_w) = dl - \frac{H}{R_A} dl + \frac{H^2}{R_A^2} dl + \theta dh_w \dots$$

Інтегруючи по всій довжині базису

$$S_0 = l - \int_{A_1}^{B_1} \frac{H}{R_A} dl + \int_{A_1}^{B_1} \frac{H^2}{R_A^2} dl + \int_{A_1}^{B_1} \theta dh_w; (16.8)$$

де A_1 і B_1 – початкова і кінцева точки базису

$$l = \sum_{A_1}^{B_1} dS \cos \alpha;$$

Величину l одержуємо після введення всіх поправок, в тому числі і за нівелювання. Поправочні члени в формулі (16.8) невеликі.

При обчисленні інтеграла можна прийняти $R_A = \text{const}$ для всього базису і знаходити R_A по середній широті. R_A – радіус кривизни нормального перерізу на поверхні референц-еліпсоїду на середній широті B_m .

$$\int_{A_1}^{B_1} H dl = H_m l;$$

$$\int_{A_1}^{B_1} H^2 dl = H^2_m l;$$

де H_m – середня висота базису над поверхнею референц – еліпсоїда.

$$\int_A^B \theta dh_w = \sum_{A_1}^{B_1} (\theta dh_w)$$

- сума відхилень виска на відповідне нівелірне перевищення.

$$S = l \left(1 - \frac{H_m}{R_\alpha} + \frac{H_m^2}{R_\alpha^2} \right) + \sum_A^B (\theta dh_w); (16.9)$$

Останній член справа враховують тільки в гірських районах і рідко при великих α .

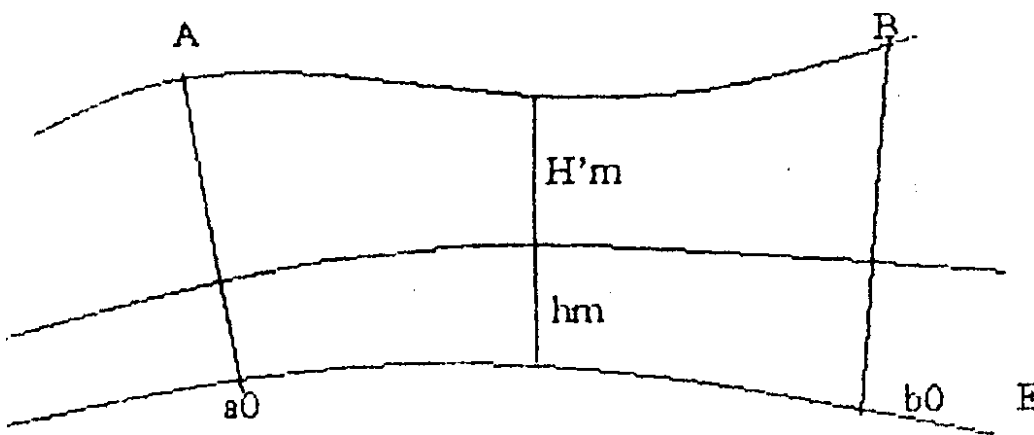


Рис 16.5 Середня висота базиса

Середня висота базису над поверхнею референц-еліпсоїду H_m

$$H_m = H'm + h_m; (16.10)$$

де $H'm$ – середня висота базису над геоїдом; h_m – середня висота геоїда над референц-еліпсоїдом.

Величину H_m знаходять як середнє арифметичне із висот окремих прольотів; h_m знімають з карти геоїда; H' - по матеріалам нівелювання; радіус кривизни нормального перерізу R_a з азимутом a :

$$R_A = \frac{MN}{N \cos^2 a + N \sin^2 a};$$

$$R_a = R \left(1 - \frac{1}{2} l^2 \cos^2 B_m \cos 2a_m \right); (16.11)$$

де R – середній радіус кривизни поверхні еліпсоїда на широті B_m .

$$R = \sqrt{NM}$$

A_m – середній азимут.

Дослідимо точність, з якою слід знати H_m для редукування. Про диференціюємо вираз:

$$S = \left(1 - \frac{H_m}{R_a} \right) \cdot l;$$

І замінимо кінцевими приростами:

$$\Delta S_0 = - \frac{\Delta H_m}{R_a} l;$$

зазначимо, що $\Delta S_0 : 1$ є відносною похибкою виміряного базису.

$$|\Delta H_m| \leq \frac{|\Delta S_0|}{l} R_a;$$

Беручи до уваги, що базис вимірюється з відносною похибкою, яка не перевищує

1: 1000000, тобто $\Delta S : 1 < 10$, одержимо:

$$\frac{|\Delta S_0|}{l} < \frac{1}{2 \cdot 10^6}$$

$$|\Delta H_m| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \cdot 6.4 \cdot 10^{-6} m \approx 3m$$

Таким чином, середню висоту необхідно знати з похибкою, яка не повинна перевищувати 3 м ($h_m < 3$ м).

Лекція № 17. Редукування по способу розгортання

17.1. Редукування похилих дальностей.

Похилі дальності редукуються на референц-еліпсоїд за іншими формулами.

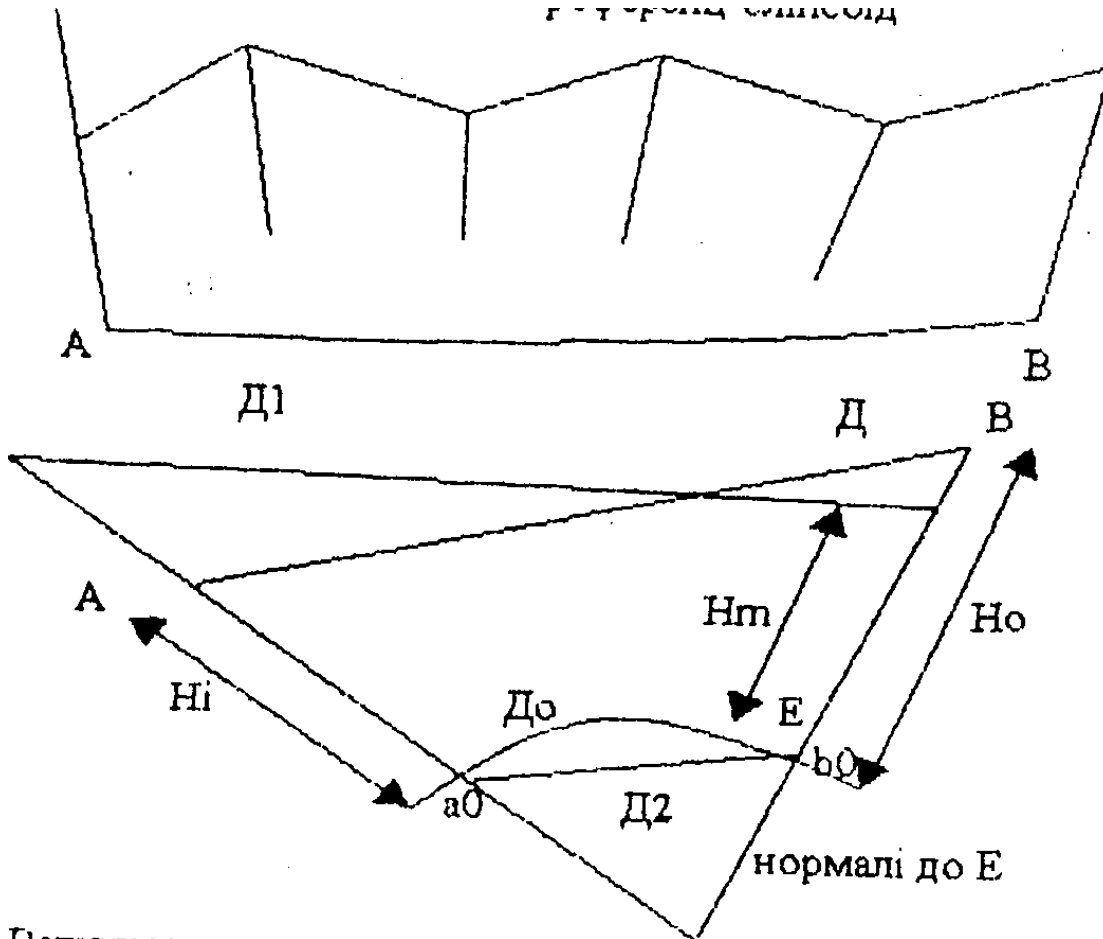


Рис 17.1 Редування похилих дальностей

Точки А і В є кінцевими точками базисної лінії. В точці А встановлений далекомір, в точці В – відбивач. Нехай D – виміряна похила дальність, в яку необхідно ввести такі поправки, щоб отримати D_0 :

1) поправка за приведення похилої дальності D до середньої висоти над референц-еліпсоїдом (приведення до середнього горизонту):

$$\Delta D_1 = \frac{(H_0 - H_1)^2}{2D} - \frac{(H_0 - H_i)^4}{2D^3}; (17.1)$$

$$D_1 = D + \Delta D_1; (17.2)$$

де H_0 – геодезична висота відбивача; H_i – геодезична висота далекоміра над поверхнею референц-еліпсоїда. На практиці беруть різницю висот над рівнем моря ($H_0 - H_i$) і отримують D_1 ;

2) поправка за приведення дальності D_1 до хорди D_2 :

$$\Delta D_2 = -\frac{H_m}{R_a} D_1 + \frac{H_m^2}{R_a^2} D_1; (17.3)$$

$$H_m = \frac{1}{2}(H_0 + H_i); \quad D_2 = D_1 + \Delta D_2; (17.4)$$

3) поправка за перехід від хорди D_2 до довжини геодезичної лінії D_0

$$\Delta D_3 = \frac{D^3}{24R^2} = 1.02 \cdot 10^{-6} \cdot D^3; (17.5)$$

де R – середній радіус Землі; D беруть в см; ΔD_3 – в метрах;
4) поправка за приведення до центрів знаків.

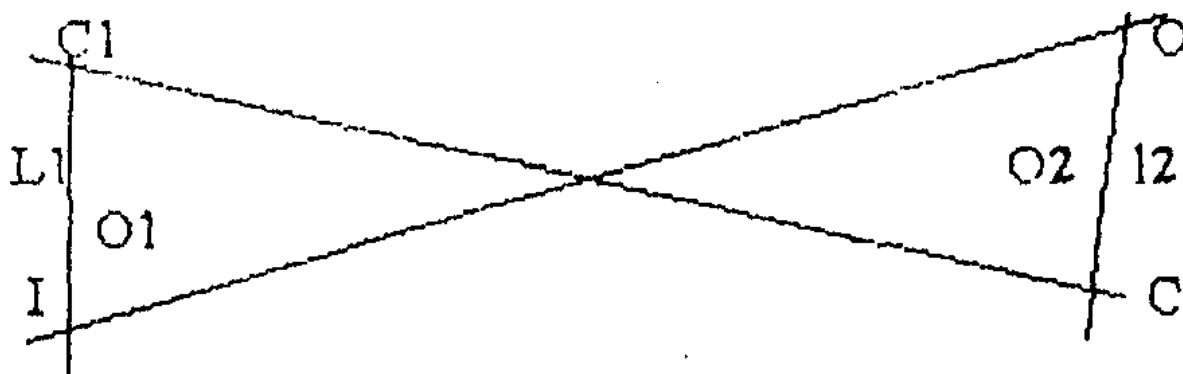


Рис 17.1.1 Схема приведення до центра знаків

В точці 1 встановлений далекомір, в точці 0 – відбивач; C1 і C2 – центри знаків на горизонтальній площині; L1, O1, I1, O2 – елементи приведення; I1 – віддаль в горизонтальній площині між далекоміром і центром знака.

$$\Delta D_4 = - (I_1 \cos \theta_1 + I_2 \cos \theta_2); (17.6)$$

$$D'_0 = D_0 + \Delta D_4; (17.7)$$

Ці формули для точних вимірювань. Є більш прості формули.

17.2 Приведення астрономічних широт і довгот до рівня моря.

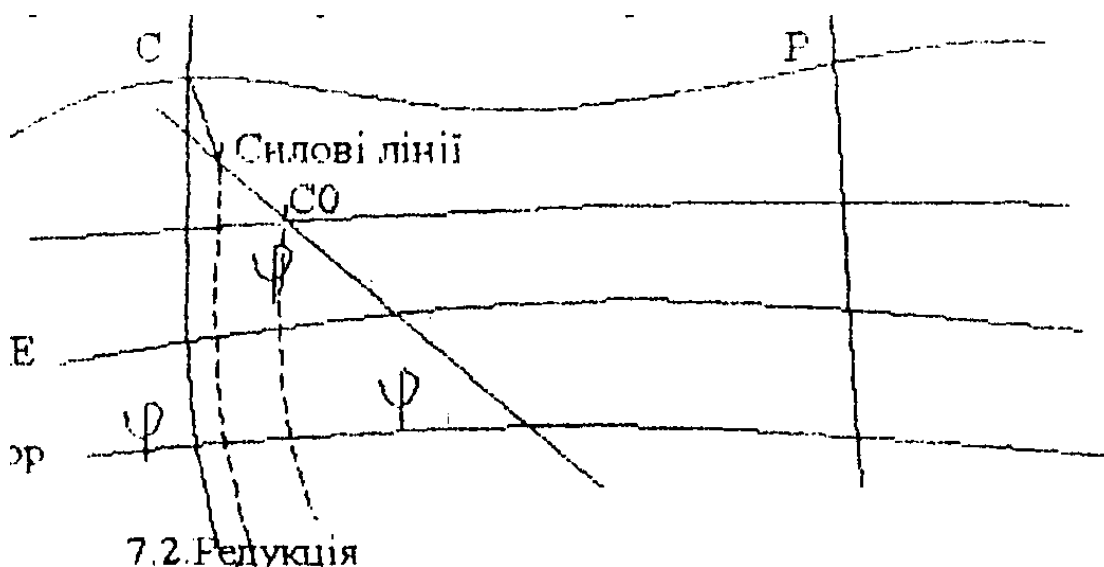


Рис 17.2 Редукція широт і довгот

Астрономічні широти і довготи визначають напрямок дотичних до силових ліній реального гравітаційного поля Землі відносно площини екватора і початкового астрономічного меридіана.

Прямовисні лінії – це дотичні до силових ліній. Точки земної поверхні розташовані на різних рівневих поверхнях. В деяких випадках виникає необхідність визначення напрямків прямовисних ліній в точках однієї і тієї ж рівневою поверхні, наприклад, в точках поверхні геоїда. С – точка земної поверхні, де визначають φ , λ . Подумки перемістимо точку С в точку С0 на геоїд. Астрономічною широтою точки С0 буде φ' .

Силкові лінії гравітаційного поля Землі являються просторовими кривими. Поправки необхідно вводити і в астрономічні довготи і широти.

Астрономічні рівняння силових ліній визначають розподіл щільностей мас в середині Землі. Цього ми не знаємо. На практиці обчислюють наближені поправки в широті і в довготу. Замінюють реальне гравітаційне поле Землі нормальним гравітаційним полем, яке створюється теоретичною моделлю Землі у вигляді еліпсоїду обертання. Щоб визначити нормальний еліпсоїд необхідно задати параметри a : α , $\gamma_{\text{екв}}$, w – кутову швидкість обертання Землі.

Силкові лінії нормального силового поля є плоскими кривими, які лежать в площині меридіану. Поправки в астрономічні довготи не вводяться. Обчислюються тільки поправки в широту:

$$\varphi' = \varphi - 0,17 \cdot H_R \sin 2 \varphi; \quad (17.8)$$

де φ – визначена астрономічна широта, φ' – приведена до рівня моря, H_R – довжина силової лінії від пункту спостереження до геоїда (км). Результат отримуємо в секундах на 1 км (0,2').

Геодезичні координати В, L точок Сі С0 практично однакові. Силова лінія близька до нормалі.

17.3. Редукування виміряних елементів в тріангуляції на поверхню референц-еліпсоїда по способу розгортання.

Розглянутий вище метод називається редукуванням по способу проектування. Цей спосіб математично точний. Однак, на практиці при початковій обробці тріангуляції ми не маємо можливості використати спосіб проектування, тому що складові відхилення виска ξ і η невідомі для кожного пункту тріангуляції. Необхідно знати висоти спостерігаємих пунктів над референц-еліпсоїдом, а ми їх не маємо, тому що геометричним нівелюванням ми знаходимо висоти тільки над рівнем моря.

Тому використовують приближений спосіб редукування – спосіб розгортання.

Суть його в наступному: виміряють геодезичні елементи і редукують їх на геоїд, а після цього без всяких змін відносять до поверхні референц-еліпсоїда. Редукування виконують прямовисними лініями з використанням одержаних з нівелювання висот пунктів над рівнем моря. При обчисленні редукації не

роблять різниці між референц-еліпсоїдом і геоїдом. Вважають, що вони співпадають. Прямовисні лінії Аа' і Вв' розглядають як нормалі до референц-еліпсоїда і висоти беруться по ним. Із вказаних умов випливають формули прямовисних ліній як нормалей до еліпсоїда. Поправка за відхилення виска відпадає. Вводиться поправка за висоту спостережуваної точки над рівнем моря.

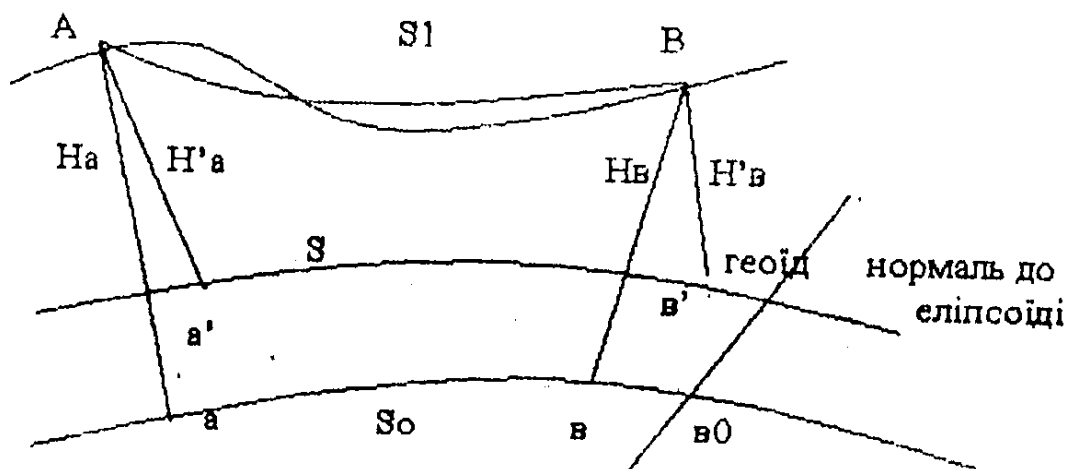


Рис 17.3 Редукування по способу розвертування

$$\delta_2 = H'_2 [1]_2 \frac{l^2}{2} \sin 2A_m \cos^2 B_2; (17.9)$$

де H'_2 – висота візирної цілі над рівнем моря.

Вводиться поправка за перехід від нормального перерізу до геодезичної лінії:

$$\delta_3 = -\frac{l^2}{12\rho''} S_{12}^2 \cdot [2]_m^2 \sin 2A_m \cos^2 B_m; (17.10)$$

У формулах для редукування базисів і похилих дальностей замість геодезичних висот над референц-еліпсоїдом розглядають висоти над рівнем моря, які беруть із геометричного нівелювання. Геодезичні широти і азимути, які входять у формули беруть до однієї хвилини.

Застосовуючи спосіб розгортання, з достатнім ступенем точності редукують триангуляцію на геоїд. Довжини ліній і кути одержують на геоїді і відкладають їх на референц-еліпсоїд, ніби поверхню геоїда розгортають на поверхню референц-еліпсоїда.

Застосування способу розгортання вносить викривлення в мережу тим більші, чим більше по висоті геоїд відходить від референц-еліпсоїда. Викривлення будуть носити систематичний характер.

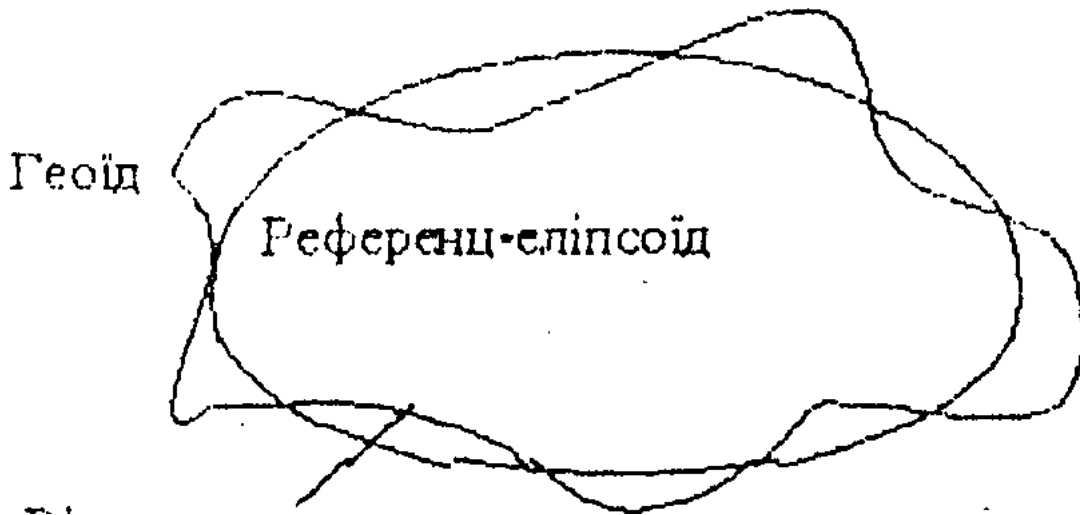


Рис 17.4 Геоїд і референц еліпсоїд

Щоб зменшити вплив слід добре підібрати і добре зорієнтувати референц-еліпсоїд. Тому триангуляцію необхідно обробляти способом проектування, який запропонував Гельметр. Звідси пішла назва проектування по Гельметру.

Для малих країн не має значення який спосіб застосовувати. Для великої країни необхідно враховувати похибки. В деталях спосіб проектування був розроблений Красовським. Спочатку застосовують спосіб розгортання і обчислюють наближені геодезичні координати. Звичайно спосіб проектування застосовують при врівноваженні астрономо-геодезичної мережі.

Лекція № 18. Системи гіпсометричних висот

18.1. Загальні поняття про гіпсометричні висоти.

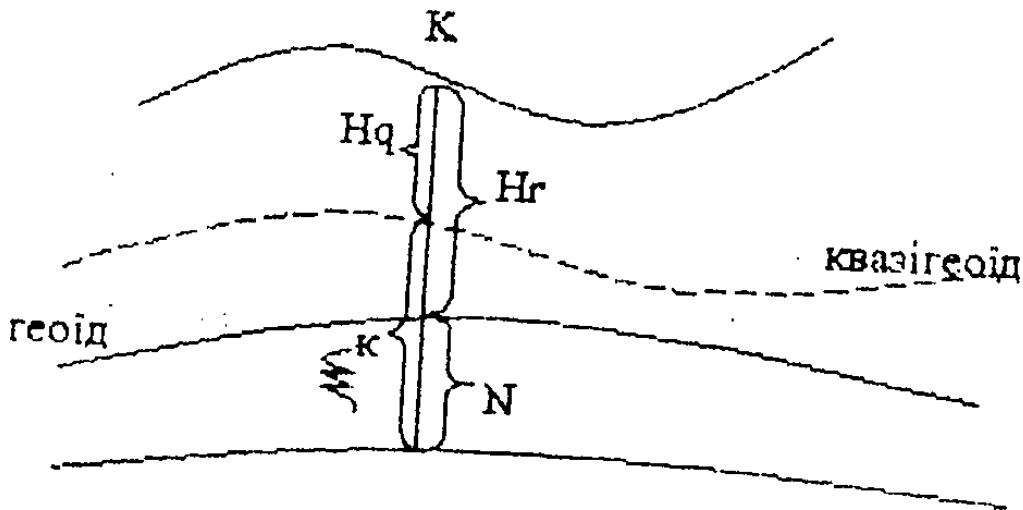


Рис 18.1 Гіпсометричні і геоїдальні висоти

Проведемо нормаль ККО до поверхні референц-еліпсоїда. Тоді геодезична висота H точки K' (по нормалі) буде $ККО = H$. До недавнього часу, коли згідно класичної теорії основною задачею вважали вивчення геоїда:

$$H^K = H_R^K + N^K ; \quad (18.1)$$

де H_R – ортометрична висота точки K , або віддаль від даної точки до геоїда; N – висота геоїда над референц-еліпсоїдом для точки K .

Сьогодні основною задачею вищої геодезії вважають визначення координат точок фізичної поверхні Землі, і

$$H^K = H_q^K + \xi^K; \quad (18.2)$$

де H_q – нормальна висота або висота даної точки над квазігеоїдом, ξ^K – висота квазігеоїда над референц-еліпсоїдом в точці K . Квазігеоїд - деяка допоміжна рівнева поверхня, близька до геоїда. Молоденький ввів поняття нормальних висот і його теорія знайшла визнання у вищій геодезії як теорія Молоденького. Ортометричну висоту H_R або нормальну висоту називають гіпсометричною частиною геодезичної висоти. N і ξ - геоїдальна частина геодезичної висоти. Повні висоти H можна визначати геометричним методом без даних про гравітаційне поле (вимірювати зенітні віддалі, але вони викривлені рефракцією). Тому гіпсометричні і геоїдальні висоти не можуть бути визначені окремо геометричним методом, необхідно враховувати дані вимірювання сили тяжіння. Основні дані для обчислення гіпсометричних висот одержують геометричним нівелюванням і вимірюванням сили тяжіння. Силові лінії завжди ортогональні до рівневою поверхні.

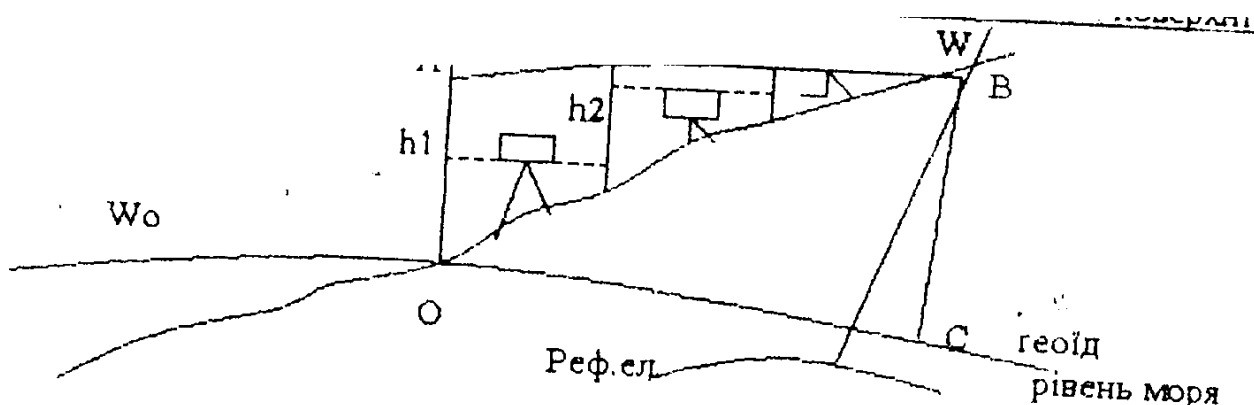


Рис 18.2 Гіпсометричні висоти

O – вихідний пункт державного нівелювання (Кронштадт). OA , BC – силові лінії гравітаційного поля Землі. Δh_1 , Δh_2 , Δh_3 – віддалі між рівневими поверхнями, які проходять через суміжні точки стояння рейок. Вважаючи, що відстані між рейками невеликі, а виміри виконані безпомилково, то висота точки B відносно точки O буде:

$$H_{вкм}^B = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3;$$

$$H_{вкм}^B = \int_0^B dh;$$

При умові, що відстані між рейками безконечно малі.

dh - елементарний нівелірний приріст.

Рівневі поверхні і потенціали сили Землі не паралельні між собою. Непаралельність рівневих поверхонь призводить до того, що виміряна висота якої-небудь точки залежить від лінії нівелювання

1 шлях $O \cdot C \cdot B$; 2 шлях $O \cdot A \cdot B$. Шлях $O \cdot C$ ніяких перевищень не дасть.

$$H_{vkm}^B = CB; \quad H_{vkm}^B = OA; \quad CB \neq OA;$$

Тому що рівневі поверхні не паралельні. Вимірювання безпомилкові, а результати різні. В замкнутому полігоні виникають теоретичні нев'язки, які слід враховувати при врівноваженні полігонів.

$$f_{теор} = \sum h_{вмк}$$

Тобто теоретична нев'язка дорівнює сумі вимірених перевищень в замкнутому полігоні вільної від всяких помилок мережі.

Таким чином, система вимірених висот не є однозначною системою і у вимірених висотах слід ввести поправки, щоб вони не залежали від лінії нівелювання.

В залежності від практичного використання є 3 однозначних системи гіпсометричних висот: ортометричні, нормальні і динамічні.

18.2. Ортометричні висоти.

Ортометричною висотою точки В називається довжина силової лінії гравітаційного поля Землі від цієї точки до геоїда $CB = H_r$. Цю відстань можна брати по прямовисній лінії і по нормалі до прийнятого референц-еліпсоїда, але обов'язково від даної точки до геоїда

$$H_r^B = \frac{1}{g_m^B} (W_0 + W^B) \quad (18.3)$$

де W_0 – потенціал сили тяжіння на геоїді; W – величина потенціалу в даній точці; $(W_0 - W)$ – різниця між потенціалами (геопотенціал); g_m – середнє значення дійсного прискорення сили тяжіння вздовж силової лінії BC

Ортометрична висота не залежить від лінії нівелювання, тому що потенціал є функція просторових координат.

$$W_0 - W^B = \int_0^B g dh \sum_0^B g_1 \Delta h_1$$

де dh – елемент нівелірного перевищення; g – прискорення сили тяжіння в мінливій точці нівелювання в місцях встановлення рейок g_1, g_2, g_3 .

Загальний вираз:

$$H_r^B = \frac{1}{g_m^B} \int_0^B g dh; \quad (18.5)$$

$$g = g_m^B + (g - g_m^B)$$

$$H_r^B = \frac{1}{g_m^B} \int_0^B [g_m^B + (g - g_m^B)] dh = \int_0^B dh + \frac{1}{g_m^B} \int_0^B (g - g_m^B) dh; (18.5)$$

Враховуючи, що $\int dh$ є сумою безпосередньо вимірних переміщень

$$\int_0^B dh = H_{вкм}^B;$$

Одержимо:

$$H_r^B = H_{вкм}^B + \frac{1}{g_m^B} \int_0^B (g - g_m^B) dh; (18.6)$$

Другий член правої частини (18.6) називається ортометричною поправкою і є поправкою вимірної висоти. Вона залежить від сили тяжіння вздовж ліній нівелювання.

Недолік системи ортометричних висот в тому, що ми не можемо точно обчислити ортометричну поправку (не знаємо g_m в середині Землі). Систему ортометричних висот не можна використовувати в гідротехнічному будівництві.

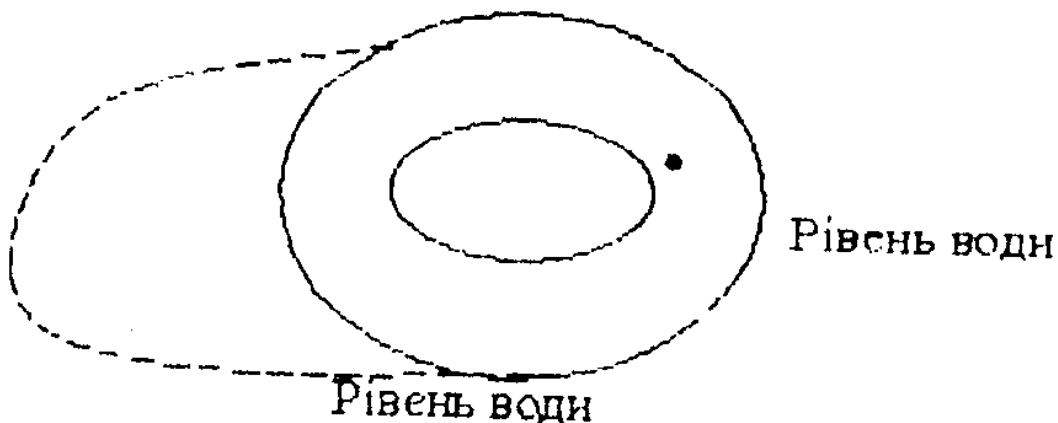


Рис 18.3 Помилка при використанні системи ортометричних висот в гідротехнічному будівництві

18.3. Нормалі висоти.

Для системи нормальних висот справедлива формула:

$$H_q^B = \frac{1}{\gamma_m^b} (W_0 - W_B) = \frac{1}{\gamma_m^b} \int_0^B g dh; (18.7)$$

Розглянемо гравітаційне поле Землі. Силі лінії гравітаційного поля спрямовані по нормалі в даній точці.

Параметрами поверхні нормального еліпсоїда є: a , α , γ_e , w . Формула нормального розподілу сили тяжіння на еліпсоїді:

$$\gamma_0^B = \gamma_e \left(1 + \beta \sin^2 \varphi_B - \beta_1 \sin^2 2\varphi_B \right); (18.8)$$

де γ_e – нормальне прискорення сили тяжіння на екваторі нормального еліпсоїда, а γ_0 – на поверхні еліпсоїда в точці $В_0$ з широтою φ_B , β і β_1 – числові параметри.

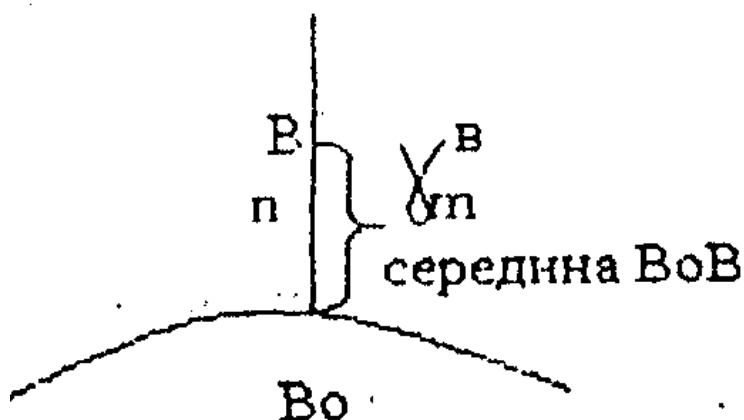


Рис 18.4 Нормальне прискорення сили тяжіння в середній точці

$$\gamma_m^B = \gamma_0^B + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H} \right) \frac{h_{вим}}{2} = \gamma_0^B - 0.3086 \frac{H^B_{вим}}{2}; (18.9)$$

де 0,3086 – вертикальний градієнт нормальної сили тяжіння в мЛГ/м;

$\delta\gamma$, δH – вертикальний градієнт H в метрах.

Спочатку проводимо нівелювання, а потім беремо $\int g dh$ і обчислюємо γ_m . Спочатку вводиться поняття нормальної висоти, а потім поняття квазігеоїда.

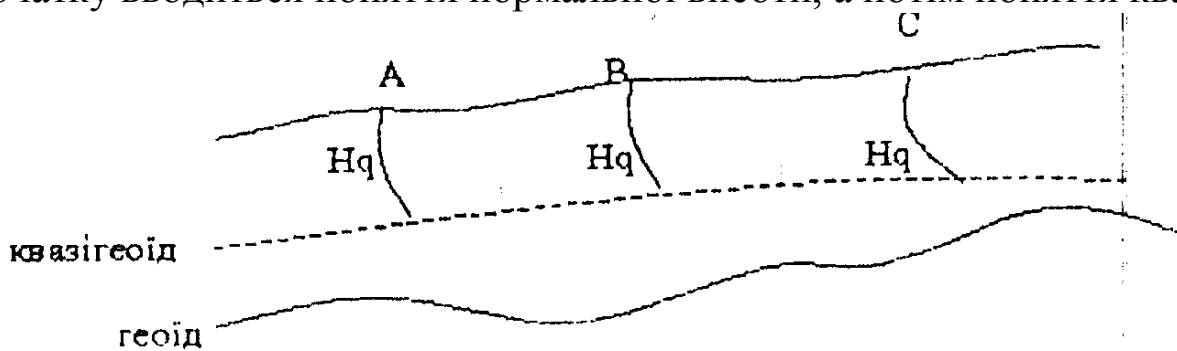


Рис 18.5 Силкові лінії

Якщо розрахувати нормальні і ортометричні висоти і знайти їх середнє значення, то максимальне відхилення висот від їх середнього арифметичного значення буде становити 2 – 2,5 метра в горах і декілька сантиметрів в рівнинній місцевості. Для використання системи нормальних висот не потрібно знати внутрішню будову Землі.

Таким чином:

$$H_q^B = H_{\text{вим}}^B \frac{1}{\gamma_m^B} \int_0^B (g - \gamma_m^B) dh; (18.10)$$

$$g = \gamma_m^B + (g - \gamma_m^B); (18.11)$$

18.4. Динамічні висоти.

Динамічні висоти H_g розраховуються по формулі:

$$H_g^B = \frac{W_0 - W^B}{\gamma_0^{45^\circ}} \int_0^B g dh; (18.12)$$

де γ_0 – прискорення нормальної сили тяжіння на нормальному еліпсоїді на широті 45° .

Різниця потенціалів ділиться на постійну величину. Динамічні висоти не залежать від шляху нівелювання і однакові для точок однієї і тієї ж рівневою поверхні. Використовуються там, де вивчають рівневі поверхні (гідротехнічне будівництво), берегова лінія водного басейну. Для динамічних висот не можна вказати яку-небудь поверхню відліку. Вони показують значення геопотенціалу в даній точці, яке виражене в лінійних величинах. Вказані формули застосовують при обробці нівелювання 1 класу. Висоти реперів II, III, IV класів отримують в тій системі, в якій взяті вихідні опорні репери.

18.5. Визначення геоїдальних висот. Астрономічне нівелювання.

Астрономічне нівелювання – один з методів регіонального вивчення фігури геоїда або квазігеоїда (не в глобальному масштабі, а в даній області материка).

Суть астрономічного нівелювання полягає в побудові профілів геоїда або квазігеоїда відносно відлікової поверхні по відносним відхиленням виска і відстаням між пунктами.

Точність астрономічного нівелювання на порядок нижча геометричного нівелювання (в 5-10 разів). Зараз практично не відрізняють визначення фігури геоїда і квазігеоїда. На земній поверхні розглянемо пункти А, В, С, Д, для яких відомі геодезичні координати B, L і астрономічні φ, λ і в той же час це астропункти. Через А, В, С, Д проведені нормалі до референц-еліпсоїда. В цих же точках показані проекції прямовисних ліній на площину вибраного профілю. O_a, O_b, O_c, O_d – складові відхилення виска в напрямку вибраного профілю на фізичній поверхні Землі.

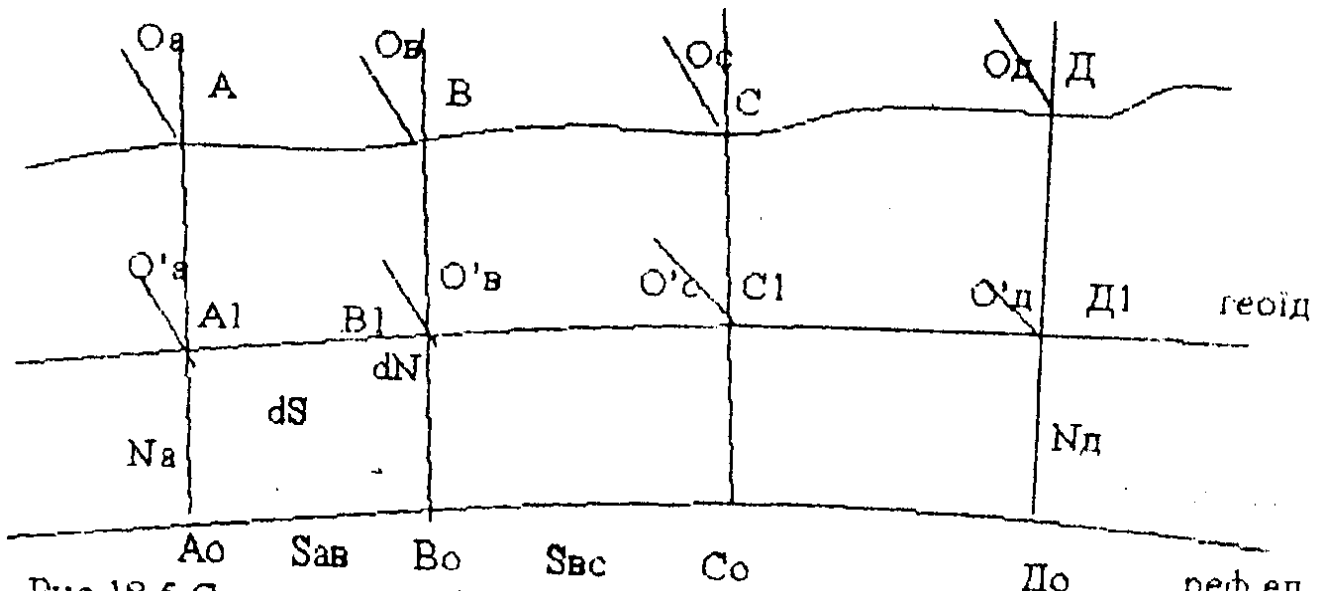


Рис. 18.5. Суть астрономічного нівельовання.

Нехай точки A1, B1, C1, D1 – проєкції точок A, B, C, D на геоїд. Вони мають одні і ті ж самі значення координат. В точках A1, B1, C1, D1 показані нормалі до геоїда. ??????? – складові відхилення виска в напрямку вибраного профілю на геоїді.

Приведемо астрономічні координати кожного з пунктів до рівня моря

$$\left. \begin{aligned} \varphi' &= \varphi - 0.17'' H_{ортот} \sin 2\varphi; \\ \lambda' &= \lambda; \\ \theta' &= \xi' \cos A + \eta' \sin A; \\ \xi' &= \eta' - B; \\ \eta' &= (\lambda' - L) \cos \varphi = (\lambda - L) \cos \varphi \end{aligned} \right\}; (18.13)$$

Точки A, B, C, D обов'язково повинні лежати в одній площині. Припустимо, що відомі відстані між пунктами Sab, Sbc, Scd. Na – висота геоїда над референц-еліпсоїдом в початковій точці, Nd – в кінцевій точці.

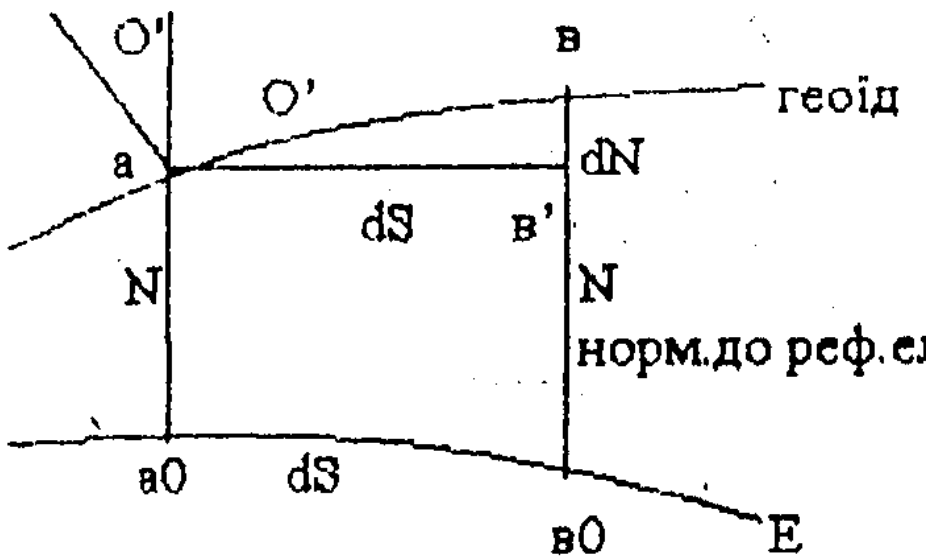


Рис 18.7 Елементарний трикутник

а, в - безконечно близькі точки. В точці а показана проекція прямовисної лінії ав'Па0в0. Кути O' рівні як кути між взаємно перпендикулярними сторонами,

$$вв0 = N + dN,$$

де dN –приріст висоти геоїда при переході з точки а в точку в. З елементарного прямокутного трикутника:

$$dN = - dS \operatorname{tg} \theta' \approx - \theta' dS;$$

Якщо висоти геоїда мають знак плюс, то він розташований вище референц-еліпсоїда. На рис. 18.6 dN має знак плюс. O' при такому розташування буде від'ємною величиною. Воно додатне, коли астрономічний Zenit відхиляється від геодезичного в його сторону.

Таким чином:

$$dN = - \theta' dS ; \quad (18.14)$$

Для кінцевих точок про інтегруємо по дузі геоїда:

$$N_D - N_A = - \int_A^D \theta' ds ; \quad (18.15)$$

Формула (18.15) називається основною формулою астрономічного нівелювання. У формулі (18.15) індекси не наводимо, щоб не захарашувати формулу.

Цей інтеграл на практиці обчислюється приблизно:

$$N_D - N_A = - \int_A^B \theta' ds - \int_B^C \theta' ds - \int_C^D \theta' ds ; \quad (18.16)$$

Припустимо відхилення виска між пунктами А – В, В – С, С – Д змінюється лінійно. Тоді кожний з написаних інтегралів обчислюють по формулі трапеції:

$$N_D - N_A = - \frac{\theta'_A + \theta'_B}{2} S_{AB} - \frac{\theta'_B + \theta'_C}{2} S_{BC} - \frac{\theta'_C + \theta'_D}{2} S_{CD} ; \quad (18.16)$$

Практичні дослідження показують, що такі припущення можна робити, якщо відстані між пунктами не перевищують 10 – 15 км в рівнинних районах і 3 – 5 км в гірських районах. Із астрономічного нівелювання можемо одержати тільки різницю висот. Щоб одержати абсолютну висоту необхідно знати висоту геоїда в початковій точці профілю.

На пунктах триангуляції або полігонометрії повинні бути виконані астрономічні визначення довготи і широти, повинні бути відомі геодезичні координати цих триангуляційних пунктів. Повинно бути виконане геометричне нівелювання з невисокою точністю для визначення висот над рівнем моря, щоб знайти поправку в приведену широту над рівнем моря:

$$\Delta\varphi = 0,17 \cdot H_{\text{орт}} \cdot \sin 2\varphi; \quad (H \text{ в км}).$$

Цей метод використовувався в Індії. У нас його не використовували, тому що астровизначення дорого коштують. У нас використовувався метод астрономо-гравіметричного нівелювання.

Теоретична геодезія

Редукування вимірних елементів триангуляції на референц-еліпсоїд по способу проектування

Лабораторна робота № 14.

Тема. Редукування похилих дальностей

1. Вихідні дані

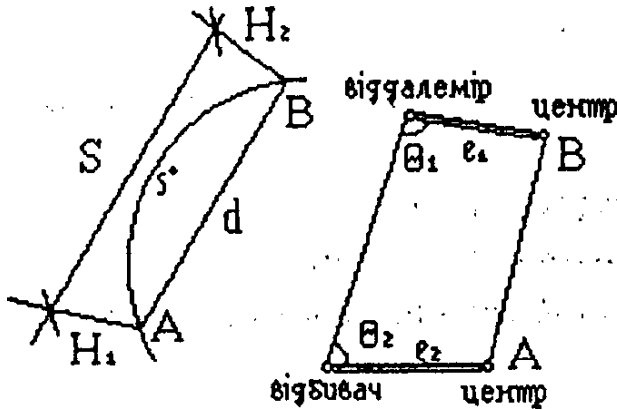


Рис 14.1

Рис 14.2

$$\begin{aligned} S &= 20285,32\text{м} & l_1 &= 1,225\text{м} \\ H_1 &= 1277,33\text{м} & \theta_1 &= 32^\circ 10' \\ H_2 &= 689,81\text{м} & l_2 &= 0,342\text{м} \\ A_m &= 74^\circ 39' & \theta_2 &= 70^\circ 30' \\ B_m &= 53^\circ 28' \end{aligned}$$

Індивідуальний варіант: до кожного із значень додати дві останні цифри шифру залікової книжки студента.

S , θ_1 і l_2 , θ_2 - елементи приведень відповідно для віддалеміра і відбивача;

l_1 - відстань в горизонтальній площині між віддалеміром і центром знаку А;

θ_1 - кут в точці встановлення віддалеміра, відрахований по годинниковій стрілці від напрямку на центр знаку до напрямку на відбивач.

2. Робочі формули

1. Поправка за ухил

$$\Delta S_1 = -\frac{(H_2 - H_1)^2}{2S} - \frac{(H_2 - H_1)^4}{(2S)^3},$$

$$H_1 = H_q^1 + \zeta_1 + i_1;$$

$$H_2 = H_q^2 + \zeta_2 + i_2;$$

де S - вимірjana по прямій відстань між віддалеміром на пункті А і відбивачем на пункті В;

H_1 і H_2 - геодезичні висоти відповідно віддалеміра і відбивача;

H_q^1 і H_q^2 - висоти пунктів А і В над квазігеоїдом;

ζ_1 і ζ_2 - висоти квазігеоїда над еліпсоїдом;

i_1 - висота віддалеміра над центром знаку А;

i_2 - висота відбивача над центром знаку В.

2. Поправка за висоту

$$\Delta S_2 = -\frac{H_m}{R_A} S + \frac{H_m^2}{R_A^2} S;$$

де $H_m = -\frac{1}{2}(H_1 + H_2);$

$$R_A = a \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 B_m - e^2 \cos^2 B_m \cos^2 A_m \right)$$

3. Поправка за перехід від хорди до геодезичної лінії

$$\Delta S_3 = \frac{S}{24R^2} \approx 1.02 \cdot 10^{-6} S_3;$$

Поправка ΔS_3 буде наведена в метрах, якщо S – в кілометрах.

4. Поправка за приведення до центрів знаків

$$\Delta S_4 = - (e_1 \cos \theta_1 + e_2 \cos \theta_2), \quad (8)$$

Довжину похилої дальності, спроектованої на еліпсоїд, одержимо за формулою

$$S_0' = S + \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 \quad (9)$$

Довжину хорди між проекціями точок А і В на референц-еліпсоїді можна обчислити також за формулою

$$d^2 = \frac{(S + \Delta H)(S - \Delta H)}{\left(1 + \frac{H_1}{R_A}\right) \left(1 + \frac{H_2}{R_A}\right)}$$

де $\Delta H = H_1 - H_2$; (10)

Формули (10) і (11) можна використати для редукування відстаней порядку сотень кілометрів.

3. Розрахунок редукованої довжини S_0 похилої віддалі

A	6378, 2 км	$\cos^2 A_m$	$7, 0074 \cdot 10^{-2}$
---	------------	--------------	-------------------------

e^2	$6,6934 \cdot 10^{-3}$	$1/2 e^2 \sin^2 B_m$	$2,1607 \cdot 10^{-3}$
$\cos^2 B_m$	$3,5437 \cdot 10^{-1}$	$e^2 \cos^2 A_m$	$1,6621 \cdot 10^{-4}$
$\sin^2 B_m$	$6,4562 \cdot 10^{-1}$	R_A	6390,9 км

H_2	689,81	H_m	983,57
H_1	1277,33	R_A	$6391 \cdot 10^3$
$H_2 - H_1$	-587,52	H_m / R_A	0,0001539
$(H_2 - H_1)^2$	$3452 \cdot 10^0$	S	20285
$2S$	$4057 \cdot 10$	Δ_1	-3,121
Δ_1	-8,509	$(H_m / R_A)^2$	$24 \cdot 10^{-9}$
$(H_2 - H_1)^4$	$12 \cdot 10^{10}$	Δ_2	0,000
$(2S)^3$	$66 \cdot 10^{12}$	ΔS_2	-3,121
Δ_2	-0,001		
ΔS_1	-8,510		

S	20,2	S	20285,32
S^3	$8,2 \cdot 10^3$	ΔS	-12,77
	$1,02 \cdot 10^{-6}$	S_0'	20272,55
ΔS_3	0,008		

$\cos \theta_1$	0,8465
e_1	1,225
$-e_1 \cos \theta_1$	-1,037
$\cos \theta_2$	0,3338
e_2	0,342
$-e_2 \cos \theta_2$	-0,114
ΔS_4	-1,151

4. контрольне вираховання довжини хорди d по формулі (9)

$\Delta H = H_2 - H_1;$	-587,52 м
$S + \Delta H$	19697,80
$S - \Delta H$	20872,84

$1 + \frac{H_1}{R_A}$	1.000199
$1 + \frac{H_2}{R_A}$	1.000107
d	20273.70

Програма редукування похилих дальностей на поверхню
референц – еліпсоїда

Фпрг	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	5	ХП4	9	ХП0	С/П	КХП4	FL0	04	ПХ2	ПХа
10	F_{\sin}	FX^2	X	2	:	1	+	ПХ0	ПХ2	ПХа
20	F_{\cos}	FX^2	X	ПХ9	F_{\cos}	FX^2	X	ПХ0	-	ПХ3
30	X	/-/	ХП4	ПХ8	ПХ7	-	ХП5	FX^2	ПХ6	2
40	X	ХП1	:	ХП9	ПХ1	:	1	+	ПХ9	X
50	/-/	ХП0	ПХ7	ПХ8	+	2	:	ПХ4	:	ХП1
60	FX^2	ПХ1	-	ПХ6	X	ХП1	ПХ6	ПХ4	:	FX^2
70	ПХ6	X	2	4	:	ХП9	ПХВ	ПХС	F_{\cos}	X
80	ПХd	ПХе	F_{\cos}	X	+	/-/	ХПа	ПХ6	FX^2	ПХ5
90	FX^2	-	ХП5	ПХ7	ПХ4	:	1	+	ПХ8	ПХ4
100	:	1	+	X	С/П	F	АВТ			

В ручному режимі після виконання програми

ПХ5	:	$F1/x$	$F\sqrt{}$	ПХ0	ПХ1	+	ПХ9	+	ПХа	+	ПХ6	+
			d	ΔS_1	ΔS_2		ΔS_3		ΔS_4		S	S_0

Протокол розрахунку по програмі

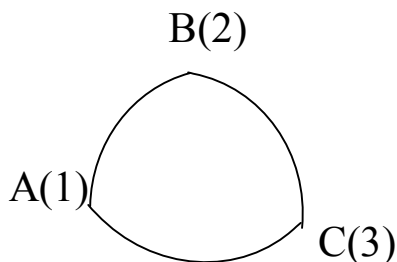
№ п/п	Введення даних	Результат	Комент.
1	0,0066934 ХП2		e^2
2	6378245 ХП3		a_m
3	В/о с/п		
4	20285,32 с/п		S_m
5	1277,33 с/п		H_{1m}
6	689,81 с/п		H_{2m}
7	$74^{\circ}39'_{K_{01} \rightarrow}$ с/п		A_m
8	$53^{\circ}28'_{K_{01} \rightarrow}$ с/п		B_m
9	1,225 с/п		e_m
10	$32^{\circ}10'_{K_{01} \rightarrow}$ с/п		θ_1
11	0,342 с/п		e_{2m}
12	$70^{\circ}30'_{K_{01} \rightarrow}$ с/п		θ_2
13		1,000307	

		8	
14	ΠX5		
15	:		
16	$F1/x$		
17	$F\sqrt{\quad}$	20273,69 M	D
18	ΠX0	- 8,509901	ΔS_1
19	ΠX1	- 3,121431	ΔS_2
20	+		
21	ΠX9	0,008515 32	ΔS_3
22	+		
23	ΠXa	-1,15189	ΔS_4
24	+	-12,7747	$\Sigma \Delta S$
25	ΠX6	20285,32	S
26	+	20272,54 5	S_0

Лабораторна робота № 15.

Редукування горизонтальних напрямків в трикутнику тріангуляції

1. Вихідні дані



$$B_1 = 53^\circ 26' + N'$$

N - дві останні

$$L_1 = 88^\circ 39' + N'$$

цифри шифру

$$A_{12} = 74^\circ 25' + N'$$

залікової книжки.

$$S_{12} = 20285_m + N_n$$

Виміряні горизонтальні напрямки, приведені до центрів знаків:

Назви вершин	Назви напрямків	Виміряні напрямки
А	В	0°00'00,00"
	С	64°25'38,72"
В	С	0°00'00,00"
	А	53°40'18,47"
С	А	0°00'00,00"
	В	61°54'05,80"

Ухили виска і висоти						
Пункти	$H_q, \text{м}$	$\zeta, \text{м}$	ξ	η	$i, \text{м}$	$V, \text{м}$
А	1228	41	10,3"	7,4"	8	10
В	625	42	15,4"	9,6"	20	23
С	929	41	-6,5"	-4,3"	15	17

2. Наближене рішення трикутників:

Вершини	Номера кутів	Виміряні кути	Sin кутів	Довжини сторін, м
А	1	64°25'38,72"	0,90203	20742
В	2	53°40'18,47"	0,80564	18526
С	3	61°54'05,80"	0,88214	20295 вихідна

3. Розрахунок наближених геодезичних координат і азимутів

$$b' = (B_2 - B_1)' = S_{12} \frac{P'}{R} \cos A_{12}$$

$$l' = (L_2 - L_1)' = S_{12} \frac{P'}{R} \cos A_{12} \sec B_1$$

$$a' = (A_{21} \pm 180^\circ - A_{12})' = S_{12} \frac{P'}{R} \cos A_{12} \operatorname{tg} B_1$$

$$\rho' = 3437,7'; \quad R = 6371 \text{ км}$$

Елементи формул	A(1) B(2)	Елементи формул	A(1) B(2)	Елементи формул	A(1) B(2)
A	74°25'	l	18'	tgB_2	0,3481
	-	L_2	68°57'	a	14,2'
A_{12}	74°25'	ρ/R	0,5396	Ці обчислення розмістити в одній колонці. Аналогічно передаються координати по лініям BC і AC	
A	14'	S_{12}	20,258		
A_{21}	254°39'	$\cos A_{12}$	0,2686		
B_1	53°26'	B	2,9'		
B	3'	L	17,7'		
B_2	53°26'	$\cos B_1$	0,5958		
L_1	68°39'	$\sin A_{12}$	0,9632		

4. Обчислення $ctgZ$.

$$ctgZ = \frac{(H_q^2 + V_2) - (H_q' + i_1)}{S_{12}} - \frac{S_{12}}{2R}$$

Елементи формул	A B	B A	B C	C B	A C	C A
$a = H_q^2 + V_2$	648	1238	946	648	946	1238
$b = H_q' + i_1$	1236	645	645	944	1236	944
$a - b$	-288	593	301	-296	-290	294
S_{12}	20,28	20,28	20,74	20,74	18,53	18,53
$(a - b) / S_{12}$	-0,0290	0,0292	0,0145	-0,0143	-0,0157	0,0159
$2R$	$12,74 \cdot 10^3$					
$-S_{12} / 2R$	-0,0016	-0,16	-0,0016	-0,0016	-0,0014	-0,0014
$ctgZ_{12}$	-0,0306	0,0276	0,0129	-0,0159	-0,0171	0,0145

5. Вихідні дані для обчислення редуцій.

Назв и вер шин	$H_q, \text{м}$	ζ	V	ξ	η	B	$S \text{ км}$	A_{12}	$ctgZ$	На пунк т
А	1228	41	10	10,3"	7,4"	53°26'	20,74	74°25' 188°51'	-0,0306 -0,0171	В С
В	625	42	23	15,4"	9,6"	53°29'	18,53	200°59' 254°39'	0,0129 0,0276	С А
С	929	41	17	-6,5"	-4,3"	53°19'	20,28	319°01' 20°54'	0,0145 -0,0159	А В

6. Обчислення поправок за відносне відхилення прямовисних ліній по формулі.

$$\delta_{12}^I = (\eta_1 \cos A_{12} - \xi_1 \sin A_{12}) ctgZ_{12}$$

Елементи 1	А	В	В	С	С	А
Формул 2	В	А	С	В	А	С
ξ_1	10,3"	15,4"	15,4"	-6,5"	-6,5"	10,3"
η_1	7,4"	9,6"	9,6"	-4,3"	-4,3"	7,4"
A_{12}	74°25'	254°39'	200°59'	20°54'	319°01'	138°51'
$\eta_1 \cos A_{12}$	1,9876	-2,5421	-8,9635	-4,0171	-3,1962	-5,5722
$-\xi_1 \sin A_{12}$	-	14,8502	5,5147	2,3770	-4,3478	-6,9123
	9,9220					
Σ	-	12,3081	-3,4488	-1,5401	-7,5440	-12,4845
	7,9344					
$ctgZ_{12}$	-	0,0276	0,0129	-0,0159	0,0145	-0,0171
	0,0306					
δ_1	0,243"	0,340"	-0,044"	0,026"	-0,109"	0,214"
$\cos A_{12}$	0,2686	-0,2648	-0,9337	0,9342	0,7433	-0,7530
$\sin A_{12}$	0,9633	-0,9643	-0,3581	0,3567	-0,6689	0,6711

7. Обчислення поправок за висоту візирної цілі над поверхнею еліпсоїда:

$$\delta_{12}^{III} = 0,108 H_2 \cos^2 B_2 \sin 2A_{12},$$

H_{12} - в кілометрах;

$$H^2 = H_q^2 + \zeta_2.$$

Елементи 1	А	В	В	С	С	А
Формул 2	В	А	С	В	А	С
H_q^2	625	1228	929	625	1228	929
ζ_2	42	41	41	42	41	41
V_2	23	10	17	23	10	17
H_2	0,690	1,279	0,987	0,690	1,279	0,987
$2A_{12}$	148°50'	149°18'	41°58'	41°44'	278°02'	277°42'
B_2	53°29'	53°26'	53°19'	53°29'	53°26'	53°19'
$\sin 2A_{12}$	0,518	0,511	0,669	0,666	0,990	-0,991
$\cos^2 B^2$	0,354	0,355	0,357	0,354	0,350	0,357
δ_2	0,014"	0,026"	0,025"	0,018"	-0,049"	-0,038"

8. Обчислення поправок за перехід від азимутів нормальних січень до азимутів геодезичних ліній.

$$\delta_{12}^{III} = -0,0282S_{12}^2 B_1 \sin 2A_{12},$$

де S - в сотнях кілометрів

Елементи 1	А	В	С
Формул 2	В	С	А
A_{12}	148°50'	41°58'	278°02'
B_1	53°26'	53°29'	53°19'
$\sin 2A_{12}$	0,518	0,669	-0,990
$\cos^2 B_1$	0,355	0,354	0,357
S_{12}	0,203	0,207	0,185
δ_3	0,000"	0,000"	0,000"

9. Напрямки, редуковані на поверхню референц-еліпсоїда.

Напрямки	Виміряні напрямки	Поправки			$\Sigma\delta$	$(\Sigma\delta)_0$	Редуковані напрямки	
		δ_1	δ_2	δ_3				
А	В	0°00'00,00"	0,243"	0,014"	0,000'	0,26"	0,00"	0,000'
	С	64°25'38,72"	0,214	-0,038	0,000	0,18"	-0,08	38,64
В	С	0°00'00,00"	-0,044	0,025	0,000	-0,02	0,00	0,00
	А	53°40'18,47"	0,340	0,026"	0,000	0,37	0,39	19,26"
С	А	0°00'00,00"	-0,109	-0,049	0,000	-0,16	0,00	0,00
	В	61°54'05,80"	0,026	0,018	0,000	0,04	0,20	06,00

Програма редукування горизонтальних напрямків.

Гпрг	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	5	ХП4	9	ХП0	С/П	КХП4	$FL0$	04	С/П	ПХа
10	ПХ8	F_{\sin}	:	ХП0	ПХ6	F_{\sin}	Х	С/П	ПХ0	ПХ7
20	F_{\sin}	Х	С/П	ПХа	ПХ9	Х	ПХ2	:	ХП0	ПХd
30	F_{\cos}	Х	С/П	ПХ0	ПХb	F_{\sin}	Х	ХП0	ПХc	F_{\cos}
40	:	С/П	ПХ0	ПХc	F_{lg}	Х	С/П	ПХ6	ПХ7	+
50	ПХ8	ПХ9	+	-	ПХа	:	ХП0	ПХа	ПХ2	:
60	2	:	ПХ0	\leftrightarrow	-	ХП0	ПХb	ПХc	F_{\cos}	Х
70	ПХd	ПХc	F_{\sin}	Х	-	ПХ0	Х	ХП4	С/П	ПХ6
80	ПХe	+	ПХ5	F_{\cos}	FX^2	Х	ПХc	2	Х	F_{\sin}
90	Х	ПХ1	Х	ХП6	С/П	ПХа	FX^2	ПХc	2	Х
100	F_{\sin}	Х	ПХ3	Х	С/П	F	АВТ			

В ручному розрахунку

105	F_{\cos}	
106	FX^2	
107	Х	
108	/-/	
109	ХП7	δ_3
110	ПХ6	
111	+	
112	ПХ4	
113	+	$\sum \delta$

Протокол розрахунку по программі

№ п/п	Введення даних	Результат	Комент.
1	6371110 ХП2		R, м
2	0.000108 ХП1		const
3	2.82/-/ВП12/-/ХП3		const
4	В/о с/п		
5	$64^{\circ}25'38,72_{K_{0111}}$ с/п		A_1
6	$53^{\circ}40'18,47_{K_{0111}}$ с/п		B_2
7	$61^{\circ}54'05,80_{K_{0111}}$ с/п		C_3
8	3437,7с/п		ρ'
9	20285 с/п		S_{12}, m
10	Ошибка! Объект		A_{12}

	не может быть создан из кодов полей редактирования. с/п		
11	$53^{\circ}26'_{K_{01} \rightarrow}$ с/п		B_1
12	$88^{\circ}39'_{K_{01} \rightarrow}$ с/п		L_1
13	с/п, с/п		
14		20742,584 с/п	S_{BC}
15		18525,788 с/п	S_{AC}
16		+2,94'	b'
17	60:ПХС+ХП5		
18	$k_{\leftarrow_{0III}}$	$53^{\circ}28'56,42''$ с/п	B_2
19		+17.6967 с/п	l'
20		+14.213	a'
21	В/о с/п		
22	625 с/п		H_q^2
23	23 с/п		V^2
24	1228 с/п		H_q^1
25	8 с/п		i_1
26	20285 с/п		S_{12}
27	7,4'' с/п		η_1
28	$74^{\circ}25'_{K_{01} \rightarrow}$ с/п		A_{12}
29	10,3 с/п		ξ_1
30	42 с/п		ζ_1
31	БП47 с/п	+0.2426 с/п	δ_1
32		+0.0132 с/п	δ_2
33	$53^{\circ}26'_{K_{01} \rightarrow}$		B_1
34	$F \cos, FX^2, x, /- /$		
35		+0.000213	δ_3
36	ХП7, ПХ6 +		
37	ПХ4+	+0.256	$\sum \delta$
38	В/о с/п		
39	1228 с/п		H_q^2

40	10 с/п		V^2
41	625 с/п		H_q^1
42	20 с/п		i_1
43	20285 с/п		S_{12}
44	9,6'' с/п		η_1
45	$254^\circ 39'_{K_{01} \rightarrow}$ с/п		A_{BA}
46	15,4'' с/п		ξ_2
47	41 с/п		ζ_2
48	БП47 с/п		δ_1
49		+0,340'' с/п	δ_2
50		+0.025'' с/п	B_1
51	$53^\circ 29'_{K_{01} \rightarrow}$		
52	Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.	+0.0002097	δ_3
53	ХП7, ПХ6 +		
54	ПХ4 +	+0.365	$\sum \delta$

ЛІТЕРАТУРА

1. Закатов П.С. Курс высшей геодезии. М. Недра, 1976.
2. Зданович В.Г. Высшая геодезия. М. Углетехиздат, 1954.
3. Морозов Н.П. Курс сфероидической геодезии. М. Недра, 1969.
4. Урмаев Н.А. Сфероидическая геодезия. М. Ред. Изд. отд ВТС, 1955.
5. Беспалов Н.А. Методы решения сфероидической геодезии. М. Недра, 1980.
6. Пеллинен Л.П. Высшая геодезия. М. Недра, 1978.
7. Черняга П.Г. Літнарівч Р.М. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт і контрольної роботи по курсу ” Основи вищої геодезії”, УДАВГ, Рівне, 1997.

Руслан Миколайович, Літнарівч
доцент, кандидат технічних наук

ОСНОВИ ВИЩОЇ ГЕОДЕЗІЇ

навчальний посібник

**для студентів денної і заочної форм навчання
з спеціальності 7.07 09 04 - Землевпорядкування та кадастр**

**Відредаговано і набрано у видавничому редакторі Word 2002
Якунін Олександр Володимирович, Матюшкін Кирил Володимирович,
Ярош Юрій Володимирович**

Чернігівський державний інститут економіки і управління

М. Чернігів

вул. Стрілецька, 1

[URL:www.geci.cn.ua](http://www.geci.cn.ua)

E-mail:rector@geci.cn.ua

Тел.: (0462) 179-308

(04622) 5-61-70